

Tentamen i Optik FFY091

Tisdag 15 mars 2016, kl. 14:00-18:00

Examinator och jourhavande lärare: Jörgen Bengtsson, tel. 0730-302737, finns på plats ca kl 15 och 17 för att svara på frågor.

Tillåtna hjälpmedel (kontrolleras av examinator)

Böcker: Beta Mathematics Handbook, Physics Handbook, 10 valfria utskrivna sidor ur Physics of Light and Optics

Häften, utskrifter, anteckningar: Föreläsningsanteckningar (även egenhändigt skrivna och kommenterade), HUPP-beskrivningar och egna, rättade, lösningar inklusive Jörgens kommentarer och av honom bifogat material, labb-pm med egna anteckningar.

Övrigt: Typgodkänd räknare samt linjal.

Lösningsförslag: Ges efter tentan på kurshemsidan i pingpong.

Rättning: Inrapporterad inom tre veckor från tentamensdatum.

Godkänt/betyg: 30p, 40p och 50p, inklusive bonus, av max 60p för betyg 3, 4, resp. 5 (för bonusregler se kurs-pm på kurshemsida).

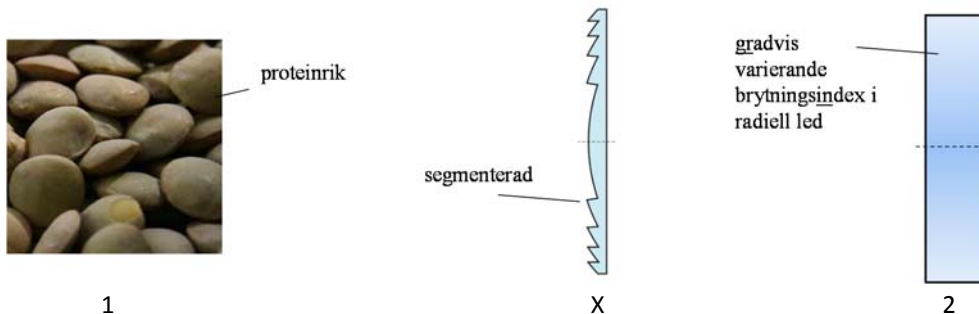
Visning/uthämtning: Efter överenskommelse via e-mail.

Ord på vägen:

- Skriv din kod på alla sidor du lämnar in.
- Motivera dina steg och formulera dig klart (gärna icke-verbalt i form av skisser) – båda dessa aspekter poängbedöms.
- Gör egna rimliga antaganden där det behövs.

1. Många korta frågor (motivera mycket kortfattat dina svar om inte annat anges explicit vid frågan)

(a) Bilderna markerade undertill med 1, X, 2, visar tre exempel på viktiga linstyper med speciella namn. Fresnel-linsen är en linstyp som först gjorde succé i fyrtorn, men nu har fler tillämpningar. Vilken bild visar en Fresnel-lins? (Svara endast med 1, X eller 2; 1p)



(b) Mångsysslaren Christian Huygens, som långt efter sin död inspirerade Fresnel med sin "princip", har också

1: ...myntat begreppet "stimulerad emission" för att beskriva hur exciterade atomer kan lockas att avge sin energi som "fotoner".

X: ...givit sitt namn till det mycket berömda sambandet mellan vinklarna för infallande och transmitterad ljusstråle i gränsytan mellan två media med olika brytningsindex.

2: ...gjort stora insatser för utvecklingen av pendelklockan.

(Svara endast med 1, X eller 2; 1p)

(c) Inom elektronikindustrin utförs mängder av avbildningar av kretsmönster. Vid avbildningen används ibland laserliknande ljus och korta exponeringstider. Då måste man tänka på att ljuset inte får vara "för bra", lite slarvigt uttryckt. Vilken egenskap hos laserljuset är det mer precis man tänker på i detta sammanhang, när man säger att laserljuset är mer eller mindre "bra"? Är det ljusets

1: ... koherens?

X: ... intensitet (ljusstyrka)?

2: ... utbredningshastighet?

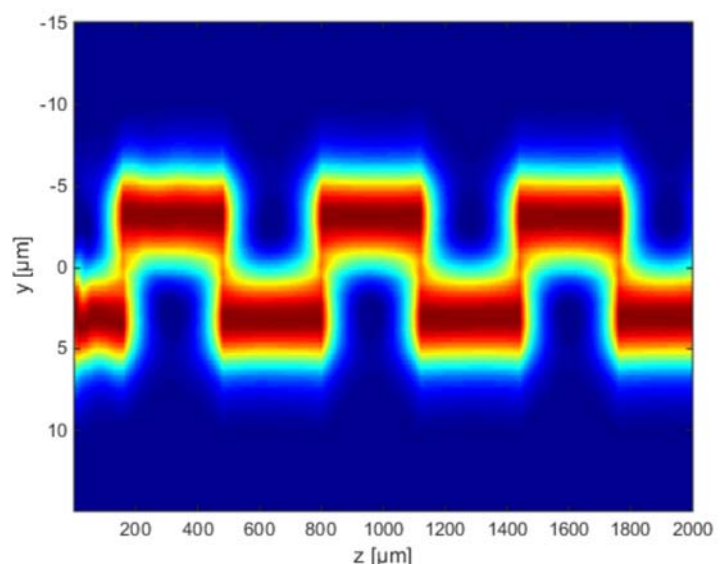
(Svara endast med 1, X eller 2; 1p)

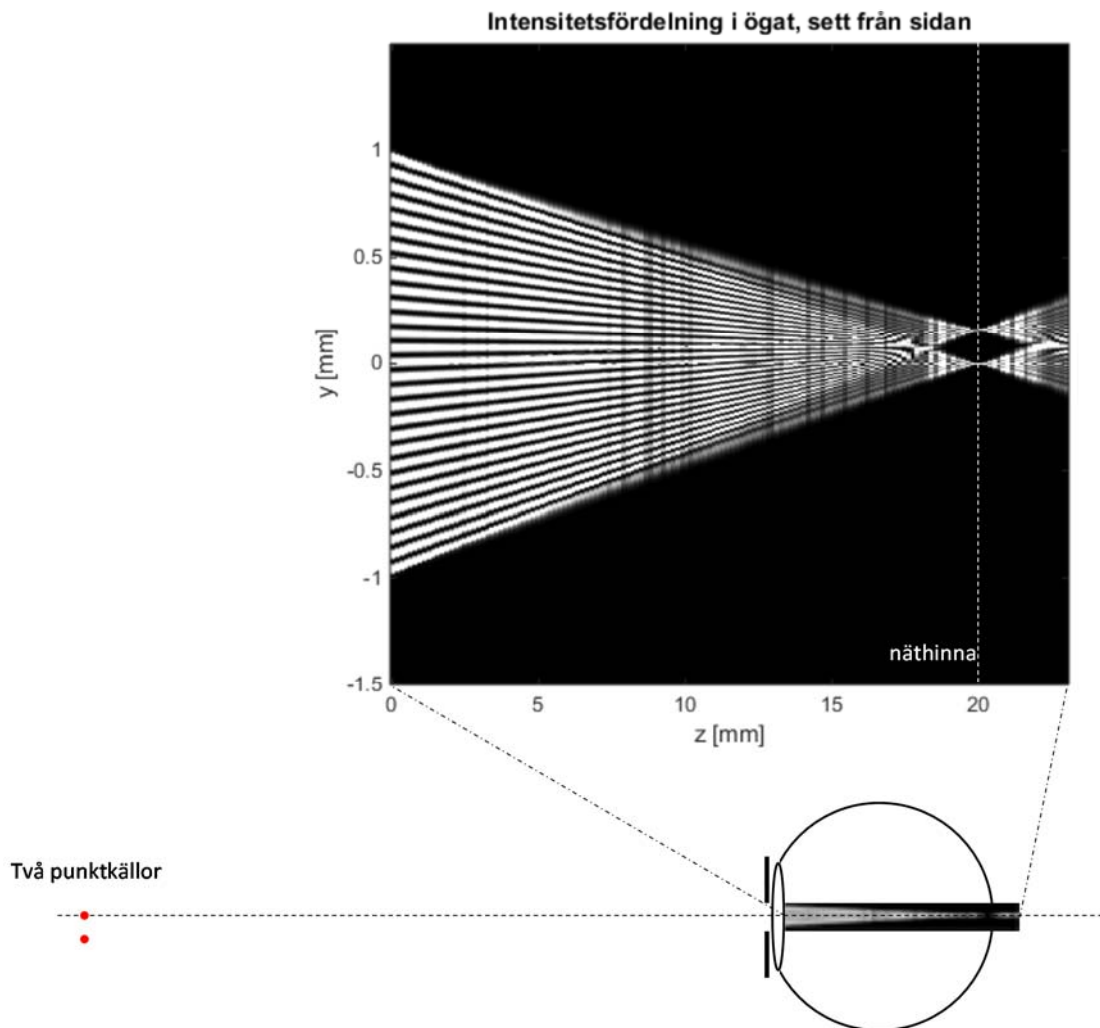
(d) Vad är det för problem man får vid avbildningen om laserljuset är "för bra", och hur kan extremt korta exponeringstider (den tid under vilken bilden av kretsmönstret faller på det ljuskänsliga materialet) förvärra problemet? (2p)

Bilden visar intensitetsfördelningen i ett tvärsnitt längs y-axeln i en optisk fiber vid telekom-våglängden 1550 nm, där fundamental- och första högre ordnings mod propagerar samtidigt i z-led.

(e) Vad kallas fenomenet som ger upphov till det visade z-varierande repetitiva mönstret (endast fenomenets namn; 1p)?

(f) Fundamentalmoden har ett effektivt brytningsindex på 1.4984 i detta fall. Vad har första högre ordnings mod för värde på sitt effektiva index? (3p)





Figuren visar den simulerade intensitetsfördelningen inuti ögat (med kursens ögonmodell) från två punktkällor på långt avstånd från ögat. (De lodräta ränderna i vissa z-positioner beror på att den plottade intensiteten i varje z-position är normerad till den maximala intensiteten i samma position.)

Motivera (med max en mening) om det är rimligt att simuleringen skulle kunna gälla för

(g) ... två inbördes koherenta punktkällor (1p)

(h) ... två inkoherenta punktkällor, instantan intensitet (1p)

(i) ... två inkoherenta punktkällor, intensitet i vanlig mening (1p)

(j) För det/de fall (g)-(i) som den visade simuleringen skulle kunna gälla, beskriv för en person som redan gjort simuleringen för en punktkälla vilka extra steg hen ska ta för att utföra simuleringen för två källor. (2p)

(k) För det/de fall (g)-(i) simuleringen inte gäller, beskriv hur du skulle göra för att åstadkomma en sann bild av intensitetsfördelningen inuti ögat? (2p)

(l) Skulle bilden du erhåller i (k) trots allt likna ovanstående bild i något område i ögat? (1p)



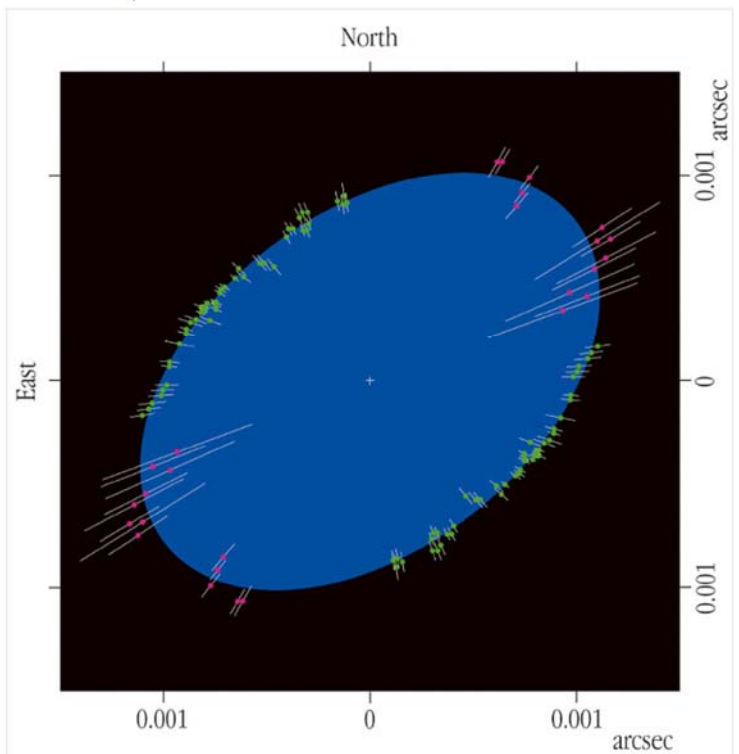
European
Southern
Observatory

Stjärnorna är för långt borta för att vi direkt ska kunna observera deras storlek och form i teleskop. Ändå har man utsett stjärnan Achernar i stjärnbilden Floden till "universums mest tillplattade", som visas i figuren.

(m) Vad är namnet på den apparat man använt sig av för att förutsäga stjärnans form? Vi har i kursen tagit upp två versioner av apparaten, välj vilken som helst av dessa. (svara enbart med namnet på mätapparaten; 1p)

(n) Hur stort utrymme skulle du vilja ha till förfogande för att själv utföra mätningarna på stjärnan Achernar, nöjer du dig med en yta stor som ett skrivbord, eller en villaträdgård, eller en hel fotbollsplan, eller vad? (3p)

The Shape of Achernar



Skalan anger vinkel (sett från Jorden) från stjärnans tänkta centrum; 1 bågsekund ("1 arcsec")=1/3600 grad.

2. The Martian – en bluff?



I boken/filmen *The Martian* (Ensam på Mars) blir astronauten Mark Watney kvarlämnad efter en svår storm, och alla tror att han omkommit. En dag studerar dock en NASA-medarbetare ett fotografi som en av kommunikationssatelliterna som kretsar ovanför Mars har tagit av Marsytan – och ser färska fotspår i sanden. Mark är vid liv!

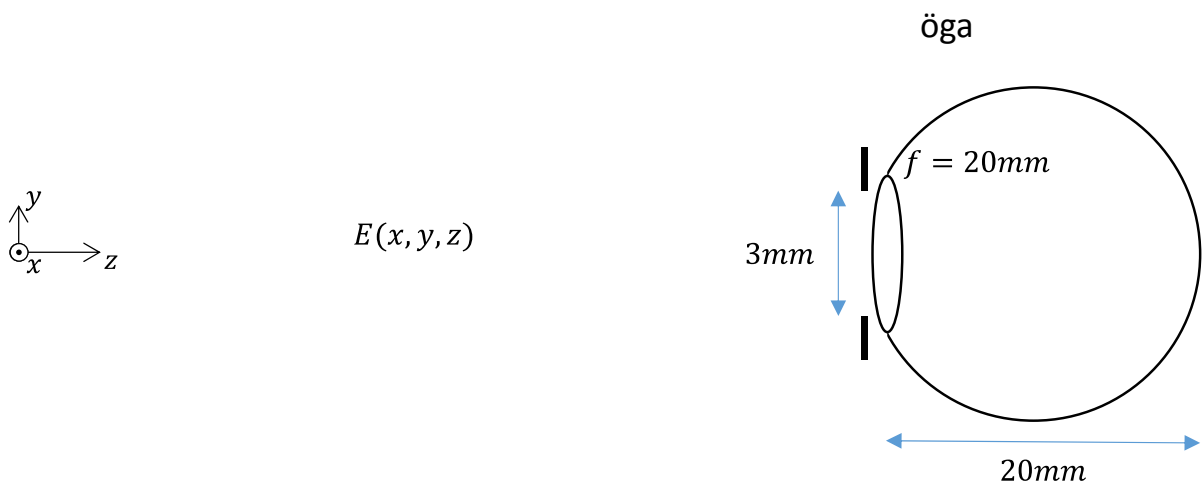
här är frågan

→ Men är det verkligen möjligt att de kretsande satelliterna kan se Marks fotspår? Antag för din gravt approximativa analys att satelliterna flyger på samma höjd och är utrustade med ett lika stort teleskop som *Mars Reconnaissance Orbiter* (MRO). MRO är en satellit som just nu snurrar runt Mars med uppdraget att ta extremt högupplösta bilder av Marsytan. Därför går den på låg höjd över ytan – bara drygt 250 km – och tittar mot ytan med sitt mycket kraftfulla HiRISE (high resolution imaging science experiment)-teleskop, det största teleskop som någon interplanetär rymdsond någonsin haft med sig. Bilden nedan visar HiRISE-teleskopets rör från den ände där ljuset kommer in i teleskopet (den snedskurna skärmen kan snurras så att solljus hindras från att komma in i teleskopet). Den vitklädda varelsen till höger är en jordmänniska (bilden togs före uppskjutning).

Du kan anta enklast möjliga teleskopkonstruktion: en enda lins (som i själva verket är en spegel) och en detektorarray med "oändligt små" pixlar så att inte detektorn begränsar upplösningen. Bedöm linsstorlek och fokallängd från bilden nedan. (8p)



3. Fältstudie



Ett öga med bästa möjliga synskärpa är inställt att se skarpt på långt avstånd och träffas då av ett koherent fält, med våglängd inom det synliga området (d.v.s. ljus), som kan beskrivas på komplex form med uttrycket

$$E(x, y, z) = E(y, z) = 2000000e^{j(1 \cdot 10^6 y + 1 \cdot 10^7 z + \pi/4)} \text{ V/m}$$

(enligt kursens konvention) när det utbreder sig i luft framför ögat, där koordinaterna y och z ska anges i meter.

(a) Ange vilken färg ljuset har. (2p)

Följande tre frågor gäller situationen på näthinnan. Ange

(b) ... formen (bedöm enbart, med några få ords motivering, om intensitetsfördelningen på näthinnan är gaussisk, bildar ett Airy-mönster, eller följer någon annan funktion som inte närmare behöver specificeras) (2p)

(c) ... ungefärliga storleken (längdskala) (2p)

(d) ... och (centrum-)positionen (2p)

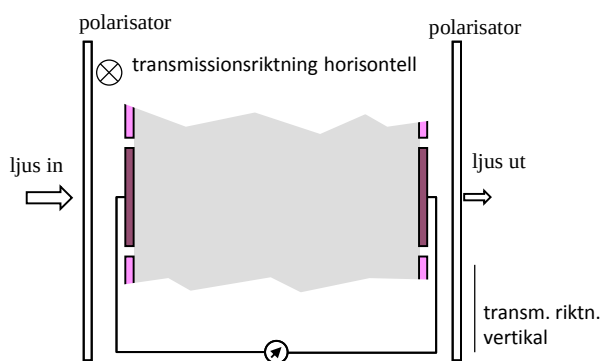
... av det belysta området på näthinnan!

4. Vilken GPS-navigator passar bäst till en cabriolet?

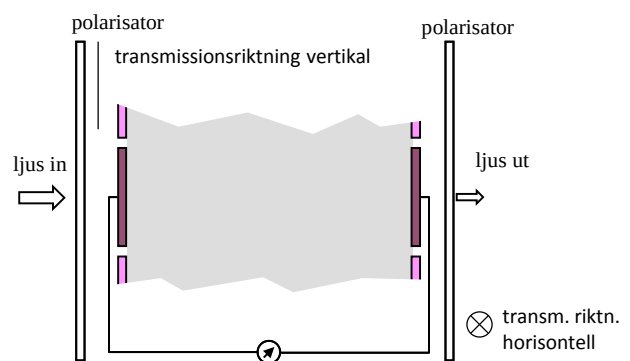


En typisk köpare av en cabriolet – en bränsleslukande bil med nedfällbart tak – är en person med för mycket pengar som gillar att glida fram längs Sunset Boulevard i sina RayBan polaroidglasögon (som består av tonat glas och en polarisator med noggrant uttänkt transmissionsriktning). Eftersom monteringsavdelningen på cabrioletfabriken är medveten om detta faktum är den noga med orienteringen av LCD-skärmen till den inbyggda GPS-navigatorn:

Variant A



Variant B



(a) Vilken av dessa två monteringsvarianter av skärmen är den rätta? (4p)

Estelle sommarjobbar på fabriken som tillverkar navigatorn. Hon får en idé om en enkel lösning på problemet, så att det inte spelar någon roll hur skärmen monteras: "Man limmar på en lagom tunn film av ett speciellt, genomskinligt material på utsidan av skärmen (på ytan närmast betraktaren) så kan cabrioletfabriken montera hur de vill!"

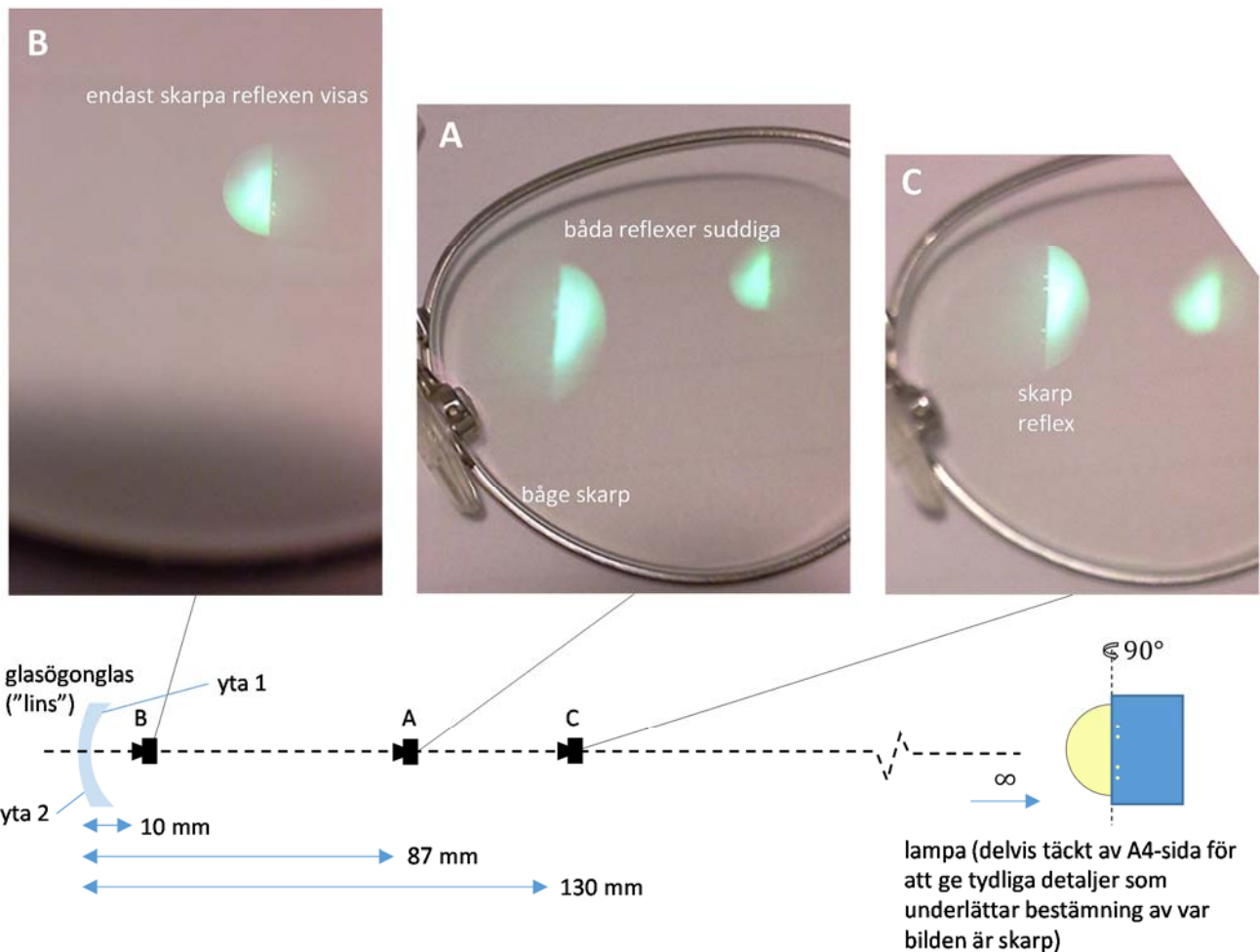
(b) Vad kallas den optiska komponent som består av en sådan film? (svara endast med komponentens namn; 1p)

Ledning: Finns t.ex. i speciella glasögon som enbart används i ganska mörka lokaler där det ofta äts popcorn.

(c) Hur ska filmen orienteras när den limmas på? (behöver ej motiveras; 1p)

(d) Förklara kortfattat (utan beräkningar) varför båda monteringsvarianterna (A och B ovan) fungerar efter att Estelles film limmats fast på skärmen! (2p)

5. Mitt handikapp – ditt problem!



Ljuset från en lampa reflekteras i ett av glasen i mina glasögon. Belysningen sker "bakifrån", så att den konkava ytan på linsen träffas. För enkelhets skull antar vi här att lampan är oändligt långt bort. Linsens ytor antas vara sfäriska.

Jag får två reflexer, en från vardera ytan på linsen. Med en liten kamera, som inte skuggar infallande ljuset från lampan, kollar jag på reflexerna (i själva verket vrider jag en aning på linsen så att det reflekterade ljuset gör en liten vinkel med det infallande, vilket också gör att de två reflexerna inte hamnar ovanpå varandra). Först ställer jag kameran godtyckligt i position A och fokuserar på glasögonbågen (kanten av linsen) så att den blir skarp. Därefter flyttar jag kameran – utan att ändra dess fokusering – till dess jag tycker att den ena reflekterade bilden av lampan är skarp (kamera i position B) respektive den andra bilden av lampan är skarp (kamera i position C) och mäter avstånden från linsen enligt figur.

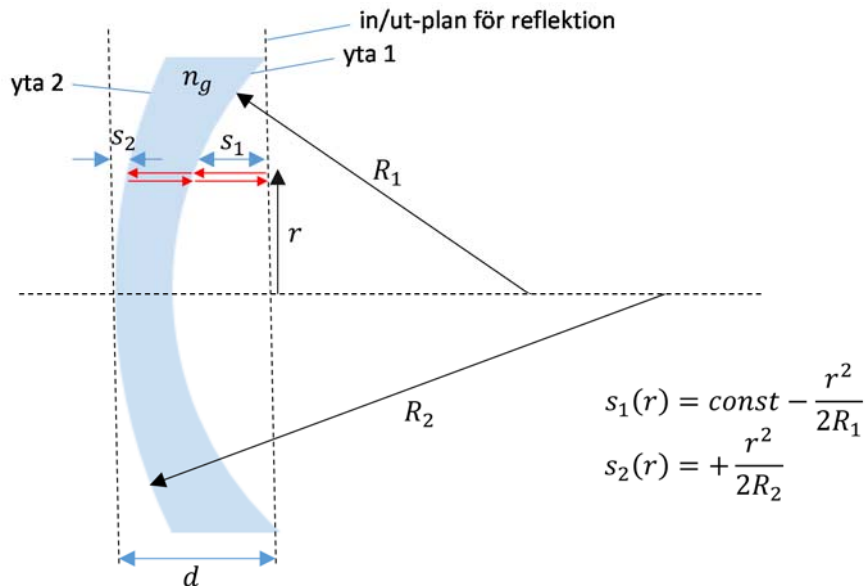
(a) Utgående från kamerans positioner, bestäm de två positioner i rummet (förutom inuti kameran) där det uppstår en avbildning ("bild") av lampan. Ange om respektive bild är reell eller virtuell. (2p)

Ledning: Kameran har samma inställning hela tiden, d.v.s. avståndet från kameran till ett objekt som avbildas skarpt i kameran är fixt under hela tiden mätningarna pågår.

(b) Vilket ljus kommer från reflektionen i yta 1: Det som ger en skarp bild i kameran när kameran är i position B eller i C? (2p)

(c) Bestäm krökningsradien för yta 1, R_1 . Varför är det inte lika enkelt att bestämma krökningsradien R_2 för yta 2? (2p)

(d) Gör en mycket grov skiss där du skissar riktningen på det ljus som lämnar linsen via reflektion i yta 1 respektive yta 2. (2p)



(e) Använd TOK-modellen för att skriva upp ett uttryck för linsens fasmodulering $\varphi(r)$ som funktion av r och linsparametrarna (R_1 , R_2 , n_g), för det ljus som reflekteras i yta 2. Räkna fasmoduleringen mellan det indikerade in- och ut-planet (som sammanfaller) genom att följa de röda pilarna. Utnyttja de givna paraxiella approximationerna av luftspalternas bredd s_1 och s_2 i figuren. Stryk alla termer som inte är relevanta. Vad skulle krökningsradien bli för en vanlig sfärisk spegelyta i luft som ger samma fasmodulering? (3p)

(f) Från experimentet, vad skulle en vanlig sfärisk spegelyta (i samma position som linsen) i luft ha för värde på krökningsradien för att ge den reflektion som åstadkoms av ljuset som reflekteras i yta 2? Är tecknet på denna krökningsradie rimligt? (2p)

Ledning: För en vanlig speglende yta i luft gäller att om den har positiv krökningsradie "samlar den ihop" infallande parallellt ljus, medan negativ krökningsradie innebär att den sprider infallande parallellt ljus

(g) Från resultaten i (e) och (f), beräkna ett värde på krökningsradien R_2 . Jag har betalat extra för att få högt brytningsindex på glaset, så $n_g = 1.67$. Är värdet på R_2 rimligt – är det rentav nästan "fönsterglas"? (2p)

Lösningsförslag Tentamen i Optik, tisdag 15 mars 2016

1. Många korta frågor

(a) Bild (1) visar en GRÖN-lins och bild (2) visar en GRIN-lins (gradex-index), dvs där glasmaterialet har en välspecifierad spatiell variation av brytningsindex, vilket kräver sofistikerad tillverkningsteknik av glaset i linsen (fortfarande i dag har GRIN-linser bara en diameter på max några centimeter p.g.a. tillverkningssvårigheter och den lilla tillgängliga maximala variationen i brytningsindex). Bild (X) visar en Fresnel-lins. Fresnel-linsen är segmenterad för att inte behöva vara så tjock, trots att lutningen på dess begränsningsytor är samma som för en betydligt tjockare, konventionell lins. Framförallt för stora linser (eller starka linser med kort fokallängd), t.ex. som dem i toppen av fyrar som kollimerar ljuskällans ljus till parallella strålar ut över havet, blir material/vikt-besparingen mycket betydande.

(b) Punkt 1: Det var Einstein som insåg att stimulerad emission måste finnas. Punkt X: Den berömda brytningslagen är uppkallad efter Snell/Snel (från den holländske astronomen och matematikern Willebrord Snel(-lius), 1580-1626; dock är brytningslagen känd i tabellerad form ända från antiken, och formulerades generellt utifrån en geometrisk konstruktion av den arabiske forskaren Ibn Sahl redan omkring år 1000). Alltså återstår endast punkt (2) som möjlig: Huygens (som alltså levde långt före Fresnel, närmare bestämt 1629-1695) gjorde bl.a. banbrytande insatser för att göra pendelklockan mycket exaktare och mer praktiskt användbar.

(c) Med "bra" ljus menas här att ljusvågen är snyggt harmonisk, och därmed förutsägbar, över (relativt) långa tidsrymder. Med andra ord handlar det om alternativ (1), koherensen hos ljuset.

(d) Vid avbildning med helt koherent ljus uppstår speckle, dvs interferens mellan olika punktkällor på objektet som visar sig som kraftiga intensitetsvariationer i bilden, avbildningen blir "grynig". I vanlig, inkoherent, avbildning medelvärdesbildas specklet bort, eftersom den inkoherenta avbildningen i själva verket är ett extremt stort antal överlagrade koherenta avbildningar (varje sådan varar ca en koherenstid τ_c) med varierande specklemönster. Dock är en trend i elektronikindustrin att använda "bättre" ljus (mer koherent, d.v.s. längre τ_c) samtidigt som exponeringstiden minskar (för att kunna exponera mer kretsmönster per tidsenhet). Då minskar antalet medelvärdesbildningar av specklet, vilket gör att intensitetsfluktuationerna riskerar att inte helt jämnas ut. Den spatiellt ojämna exponeringen leder till ojämna tjocklekar hos ledningsbanorna i kretsen vilket är ogynnsamt för deras prestanda.

(e) Detta interferensfenomen mellan olika moder i en vågledare kallas för multimodinterferens (MMI).

(f) MMI-mönstret orsakas av att de två moderna ändrar sin fas olika mycket per propagerad sträcka. För fundamentalmoden är fasändringen under sträckan Δz

$$\Delta\varphi_0 = k_0 n_{eff,0} \Delta z$$

och för första högre ordnings mod

$$\Delta\varphi_1 = k_0 n_{eff,1} \Delta z$$

där vi sett från HUPP5 att $n_{eff,0} > n_{eff,1}$ eftersom fundamentalmoden "känner" mer av kärnans högre index. Fundamentalmoden ökar alltså sin fas mer än högre ordningens mod vid propagation, och den ändrade fasskillnaden, $\Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_1$, mellan moderna ändrar interferensen dem emellan – det är därför som MMI-mönstret ändras med propagationssträckan Δz . Men när man propagerat sträckan $\Delta z_{2\pi}$, så att fasskillnaden

uppgår till 2π radianer, interfererar moderna på samma sätt som för $\Delta z = 0$. MMI-mönstret upprepar sig alltså periodiskt med perioden $\Delta z_{2\pi}$ så att

$$\Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_1 = k_0 n_{eff,0} \Delta z_{2\pi} - k_0 n_{eff,1} \Delta z_{2\pi} \equiv 2\pi$$

$$\Rightarrow \Delta z_{2\pi} = \frac{\lambda_0}{n_{eff,0} - n_{eff,1}} \approx 620 \mu m \text{ enligt figuren}$$

$$\Rightarrow n_{eff,1} = 1.4984 - 0.0025 = 1.4959$$

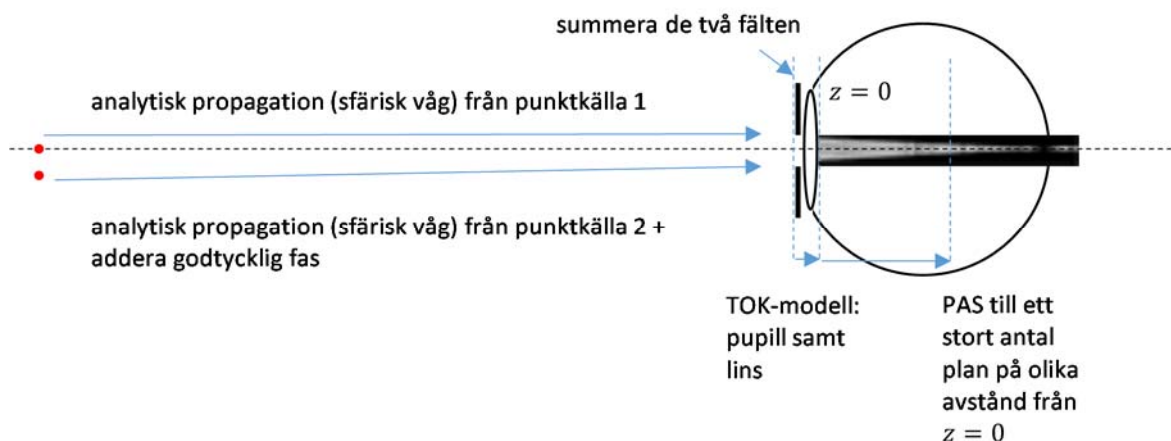
där det för en gångs skull kan vara motiverat med fyra decimaler.

(g) Vi ser att det enligt simuleringen uppstår en randig intensitetsfördelning inuti ögat, med intensitetsvariation i y-led. En sådan randighet uppstår när de två vågorna, från vardera punktkällan, överlappar med något olika infallsvinkel och interfererar. I verkligheten kan vi ha denna situation när de två punktkällorna är koherenta (t.ex. när deras elektronmoln sätts i rörelse av en infallande laserstråle), och därmed har en fix fasrelation, vilket ger ett stabilt interferensmönster som inte ändrar sig i tiden. Simuleringen skulle alltså kunna gälla fall (g).

(h) Ja, även denna situation skulle simuleringen kunna gälla för. Den instantana, "ögonblickliga", intensiteten erhålls under en tid som är kortare än koherenstiden. Under sådana korta stunder är även "inkoherenta" källor koherenta; situationen blir densamma som i (g) eftersom de två fälten har en fix fas relativt varandra, och alltså kommer att interferera konstruktivt/destruktivt i fixa punkter i rummet.

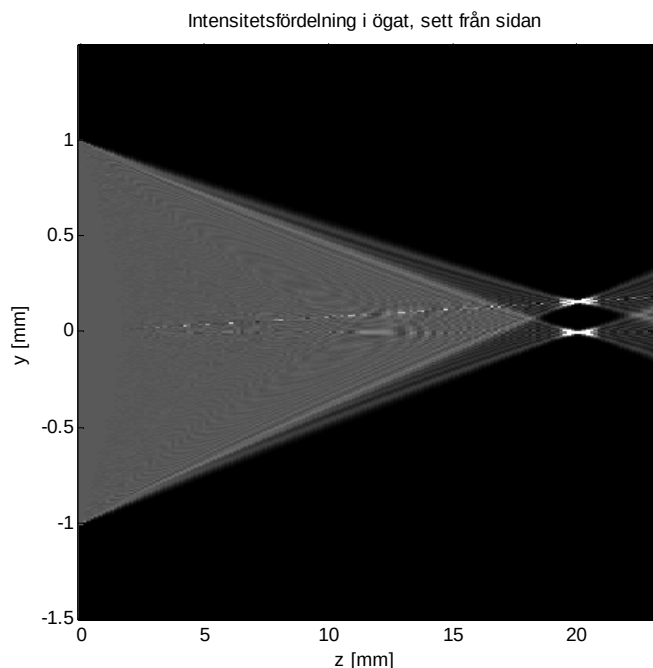
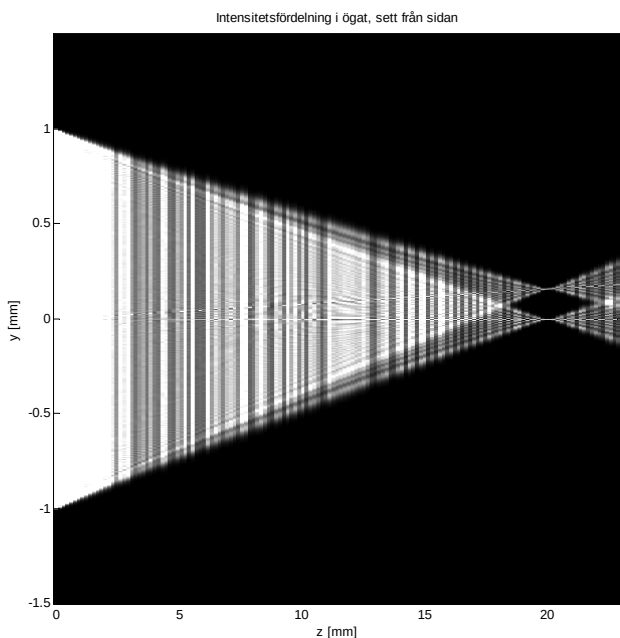
(i) Nej, den vanliga intensiteten är medelvärdet av den instantana intensiteten över väldigt många koherenstider. Det som skiljer fälten från punktkällorna från en koherenstid till nästa är deras fasskillnad, som varierar slumpmässigt. Det betyder att interferensränderna i den instantana intensiteten förskjuts i vertikal led mellan olika koherenstider, så att randmönstret suddas ut i medelvärdesbildningen. Observera att det bara är interferensen mellan olika punktkällor som suddas ut, varje punktkälla interfererar fortfarande med sig själv och skapar t.ex. det mönster man kan se nära näthinnan, där ljuset från de två punktkällorna har separerat i rummet (se svaret till (l)).

(j) För fallen (g) och (h), alltså. Först erhålls fältet från varje punktkälla för sig i ett plan precis framför ögat med analytiskt uttryck (sfärisk våg från punktkällan). Om man vill kan man addera en konstant men slumpmässig fas till det ena fältet för att simulera att punktkällorna har en godtycklig inbördes fasrelation. Fälten adderas lämpligen redan i detta plan – man kan propagera fälten var för sig och addera när man kommit fram till slutplanet men det blir samma resultat och det kräver mer numeriskt arbete. Sedan gör man precis som i fallet med bara en punktkälla: det totala fältet propageras genom pupill och lins (multiplikation med TOKens transmissionsfunktion) och fram till ett stort antal plan inuti ögat med PAS-propagering. I varje plan plottas intensiteten längs y-axeln, så att man erhåller tvärsnittsintensiteten inuti ögat.



(k) Våra propagationsmetoder gäller koherenta fält. Intensitetsfördelningen (i vanlig mening) från två inkoherenta punktkällor kan alltså inte direkt beräknas genom en enda propagation. Åtminstone två metoder finns:

i. Klassiska metoden ("jobbiga metoden", fast mycket mindre jobbig än Moder Natur-metoden nedan): Utnyttjar att intensitetsfördelningen från två inkoherenta källor är summan av intensitetsfördelningarna från vardera källan. Man brukar lite slarvigt säga att "inkoherenta källor inte interfererar", men egentligen är det tidsmedelvärderingen över väldigt många koherenstider som släcker ut interferensen så att intensiteterna kan summeras. I vårt fall gör man alltså två propagationer genom hela systemet, en från varje punktkälla (med den andra släckt), och sedan summeras intensiteterna. Resultatet visas nedan – de typiska interferensränderna saknas nu, endast de falska lodräta ränderna finns p.g.a. svårigheten att normera plotten på ett bra sätt. En mer verklighetstrogen plot visas i högerfiguren, utan normering, men den blir å andra sidan kraftigt mättad nära fokus, där intensiteten är hög.



ii. Moder Natur-metoden: Simulerar det verkliga förloppet när den tidsmedelvärdade intensiteten bildas genom att göra ett stort antal simuleringar med två koherenta punktkällor så som beskrivs i (j). Skillnaden mellan simuleringarna är bara den godtyckliga fasen som adderas till ett av fälten, för att simulera att varje propagation görs under en ny koherenstid. Det betyder att ränderna i interferensmönstret rör sig i y-led från en koherenstid till nästa. De erhållna intensitetsfördelningarna i ögat adderas för varje koherenstid för att simulera medelvärdesbildning. Efter oändligt många koherenstider blir resultatet samma som med den Klassiska metoden – metoden är alltså mycket tidskrävande!

(l) Ja, i de områden i ögat där ljuset från de två punktkällorna separerat från varandra, vilket enligt bilden på tentatesen tycks vara ungefär i området $18 \text{ mm} < z < 22 \text{ mm}$. I dessa områden spelar det ju ingen roll huruvida fälten (koherenta källor) eller intensiteten (inkoherenta källor) adderas eftersom bara ett av fälten är skilt från noll i varje position. Observera att det ändå förekommer interferensmönster i denna region, men som sades i (i) är det fältet från en källa som interfererar med sig själv.

(m) För att bestämma den synvinkel en stjärna (eller en annan inkoherent ljuskälla) upptar sett från jorden används koherensbestämning med hjälp av en Michelson stellar interferometer ("stjärninterferometer") eller Hanbury-Brown-Twiss-(HBT-)interferometern. För övrigt visar resultatet i (n) att det behövs så stor mätuppställning att den modernare HBT-interferometern är den enda praktiska metoden i detta fall.

(n) Experimentet går ut på att undersöka hur korrelationen mellan fältet från stjärnan ändras i två punkter som successivt avlägsnas från varandra. Korrelationen mäts under den sträcka den varierar signifikant, vilket är (drygt) den spatiella koherenslängden l_s . Den ges av tumregeln

$$l_s = \frac{\lambda}{D_{star}} L = \frac{\lambda}{\theta_{star}}$$

där θ_{star} är synvinkeln stjärnan upptar sett från Jorden. Eftersom stjärnan i detta fall är elliptisk blir l_s något längre i den riktning där stjärnan är smalare, vilket man experimentellt konstaterar genom att vrida mätuppställningen och mäta i många olika riktningar (som indikeras i bilden) och anpassa resultaten till en elliptisk form. För vår approximativa analys är detta dock onödigt finlir, vi tar ett approximativt värde på, säg, $\theta_{star}=0.002''$ arcsec", och säger att vi utför mätningen vid en våglängd av 600 nm (bara för att dra till med något) och får då

$$l_s = \frac{600nm}{\frac{0.002}{3600} * \pi / 180} = 62m \approx 100m$$

Och eftersom vi vill mäta i olika riktningar är det väl bra med en yta på minst 100x100 meter, alltså till och med lite mer än en fotbollsplan.

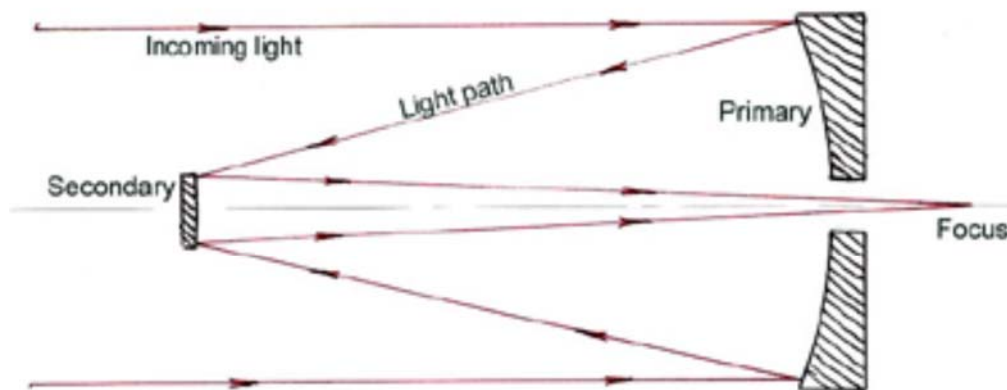
2. The Martian – en bluff?

Varför räkna på det när vi kan gå direkt till NASAs hemsida och läsa följande

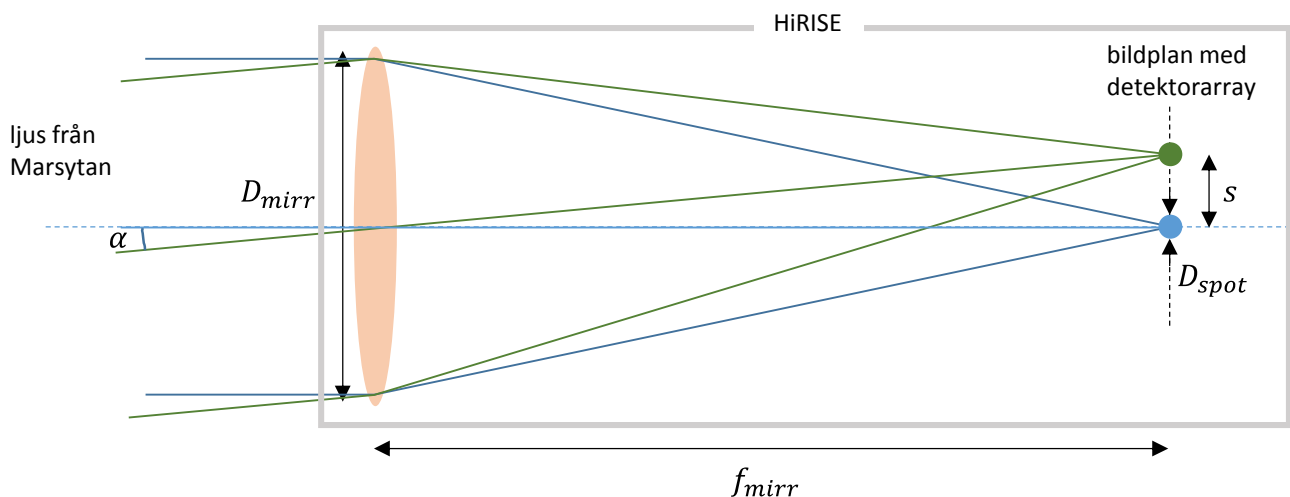
The camera operates in visible wavelengths, the same as human eyes, but with a telescopic lens that produces images at resolutions never before seen in planetary exploration missions. These high-resolution images enable scientists to distinguish 1-meter-size (about 3-foot-size) objects on Mars and

Man kan alltså urskilja objekt som är "3 fötter" stora, men hur är det med Marks "1 fot" stora fotspår? Är det teoretiskt möjligt, om man tänjer gränserna till det yttersta, och alltid avrundar "åt rätt håll", d.v.s. en approach rakt motsatt sund ingenjörsexpraxis? För vi vill ju så gärna att filmen ska vara sann! Låt oss räkna!

HiRISE-teleskopet är egentligen ett spegelteleskop, där den stora spegeln ("primary" - primärspegeln) sitter längst in i röret. På bilden i tentatesen kan man ana en hållare i rörets framända där en liten spegel ("secondary") sitter som kastar tillbaka ljuset ut genom ett centralt hål i primärspegeln. Bilden nedan visar hur det ser ut:



Vi gör dock som vanligt och viker ut strålgången genom att ersätta primärspegeln med en lins – sekundärspegeln har ingen egentlig optisk funktion utan syftar bara till att styra ljuset till något ställe där det bekvämt kan studeras. Man skulle alltså i princip kunna strunta i sekundärspegeln, och sätta kameran direkt i fokus från primärspegeln, men kameran är ganska stor och skulle blockera en stor del av det inkommande ljuset. När vi viker ut strålgången har vi inga sådana problem:



Vi betraktar ljuset från två punktkällor på Marsytan, markerade med grönt resp blått i skissen. Eftersom punktkällorna är avlägsna är infallande ljus på linsen en plan våg, och fokus hamnar på just fokallängds avstånd från linsen, d.v.s. bildplanet ligger i linsens fokalplan. Om ljuset från de två punktkällorna bildar vinkeln α med varandra blir separationen s i bildplanet (geometrisk optik: "stråle genom mitten på lins bryts ej")

$$s = \alpha \cdot f_{\text{mirr}}$$

En punktkälla blir dock inte punktformig i bildplanet utan har en ändlig utsträckning p.g.a. ljusets vågnatur, vars storlek ges approximativt av tumregeln för minsta spotsize

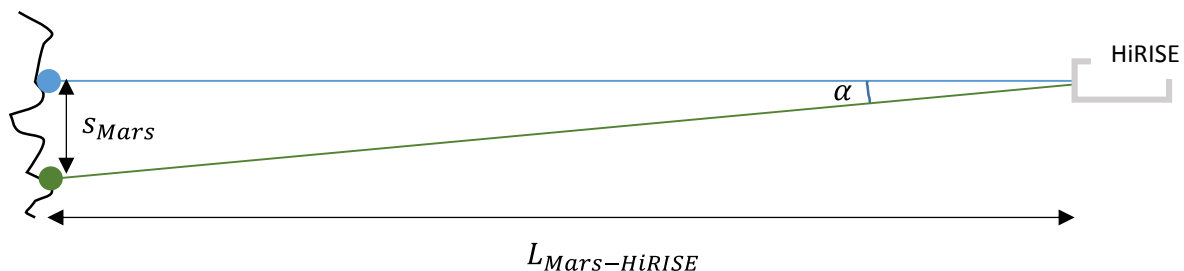
$$D_{\text{spot}} = \text{const} \frac{\lambda}{D_{\text{mirr}}} f_{\text{mirr}} \approx 1 \cdot \frac{\lambda}{D_{\text{mirr}}} f_{\text{mirr}}$$

där vi alltså antar att ljuset är perfekt fokuserat i fokalplanet (så att vi verkligen får minsta spotsize) trots att det är mycket svårt att tillverka så stora speglar med perfekt ytform. Vidare valde vi $\text{const} = 1$ trots att startfältet efter linsen är ett konstant fält med cirkulärt tvärsnitt (linsen "skär ut" ett cirkulärt område av den infallande vågen från den avlägsna punktkällan). Vi kunde alltså valt $\text{const} = 2.44$ men vi vet att denna definition av spotsize är ganska generös. Dessutom vill vi ju att filmen ska vara sann, så vi väljer ett något lägre värde för spotsize (analysen är i vilket fall approximativ). Vi definierar (ganska godtyckligt) de två punktkällorna som upplösta (kan ses som två hyfsat separata punkter) om deras separation i bildplanet överstiger spotsize, dvs

$$s > D_{\text{spot}} \Rightarrow \alpha > \frac{\lambda}{D_{\text{mirr}}} = \frac{500\text{nm}}{50\text{cm}} = 10^{-6}\text{rad} = 0.00006^\circ \text{ (liten vinkel!)}$$

där vi uppskattade linsens (primärspeglens) diameter från fotografiet av HiRISE: vi antar att teleskoptubens diameter, som verkar vara drygt längden av överarmen hos en jordmänniska i renrumsdräkt även om perspektivet är lite lurigt, är obetydligt större än speglens; med andra ord kan vi anta en spegeldiameter på runt en halvmeter (vilket också är dess faktiska diameter). För våglängden använde vi en i mitten av det synliga spektrat (HiRISE används även i infrarött, d.v.s. för våglängder längre än synliga, men det ger inte högre upplösning).

Marsytan



Om ljuset från två nätt och jämnt upplösta punktkällor är separerade med vinkeln α vid teleskopet, är alltså själva punktkällorna på Marsytan separerade med

$$s_{\text{Mars}} = \alpha \cdot L_{\text{Mars-HiRISE}} = 10^{-6} \cdot 250\text{km} = 25\text{ cm} \approx 1\text{ fot(!)}$$

Under sjukt ideala förhållanden skulle alltså möjligen mörka fotspår på en solbelyst sandig yta kunna uppfattas som extremt små och bara en aning mörkare diffusa fläckar mot en ljusare bakgrund, förutsatt att detektorerna i teleskopets bildplan ligger så tätt att de inte begränsar upplösningen. I sann amerikansk hollywoodpositivism tar vi fasta på detta, och drar sålunda den självklara slutsatsen att

"The Martian" tells the truth!

3. Fältstudie

Fältet framför ögat är en plan våg, vilket vi inser genom att jämföra med det allmänna uttrycket för en plan våg

$$E(x, y, z) = Ae^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

Vi kan alltså direkt identifiera

$$A = 2000000e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$k_x = 0 \text{ m}^{-1}$$

$$k_y = 1 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

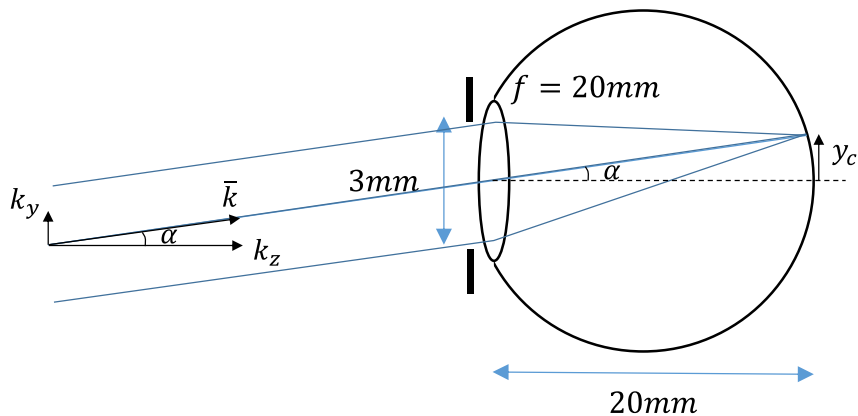
$$k_z = 1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

(a) Längden av k -vektorn är

$$\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 1.005 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \equiv k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 625 \text{ nm}$$

Färgen är alltså röd (röd-orange).

(b)-(d): Utbredningsriktningen är k -vektorns riktning, som bildar vinkeln α med z -axeln



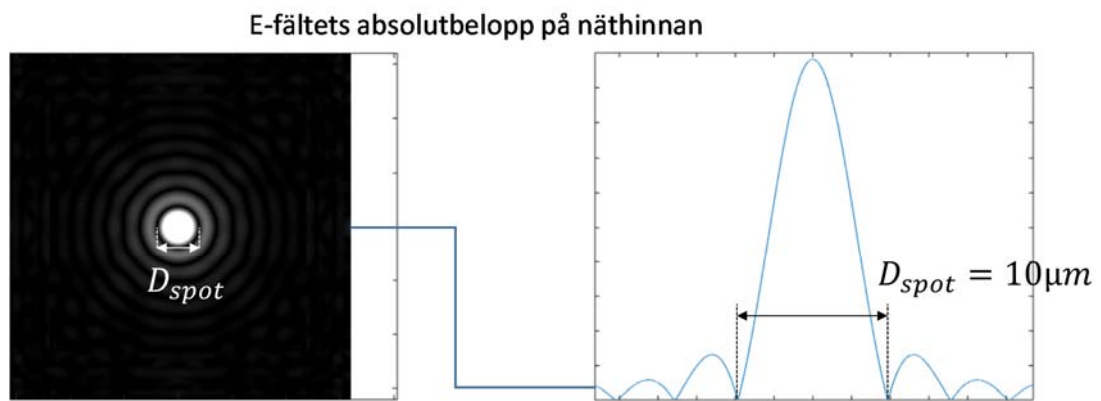
$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{k_y}{k_z}\right) = 0.1 \text{ rad}$$

Alternativt kan vi alltså säga att det fält som träffar pupillen är kollimerat ljus som utbereder sig med vinkeln α mot z-axeln. Eftersom näthinnan ligger på fokallängds avstånd från linsen fås en fokuserad fläck där. Positionen y_c hos fläckens centrum på näthinnan bestäms med regeln att en stråle genom mitten av linsen inte bryts

$$y_c = \alpha \cdot f = 2\text{mm}$$

Precis efter pupillen är fältet kollimerat (som före pupillen) med konstant intensitet över ett cirkulärt tvärsnitt. Som vi såg i HUPP 1 ger ett sådant fält en Airy-fördelad intensitet i sitt fokus, d.v.s. på näthinnan, se figuren nedan för illustration. Som storlek på fokusfläcken (minsta spotsize) tar man då ofta första nollställets diameter, D_{spot} , som ges av den exakta tumregeln

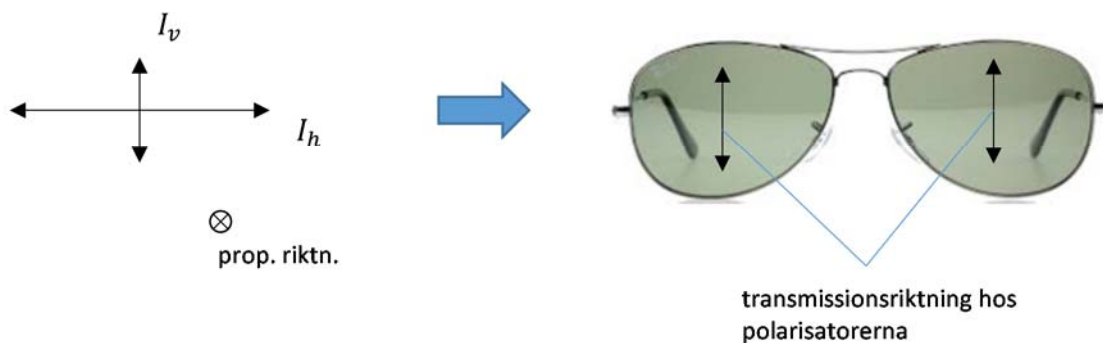
$$D_{spot} = 2.44 \frac{\lambda}{D_{pupill}} f = 2.44 \frac{625\text{nm}}{3\text{mm}} 20\text{mm} \approx 10\mu\text{m}$$



4. Vilken GPS-navigator passar bäst till en cabriolet?

(a) Polaroidglasögon, d.v.s. glasögon där glaset består av en polarisator, är avsedda för att maximalt dämpa ljuset från reflexer i vattenpölar eller andra vattenytor, d.v.s. horisontella ytor. Detta ljus är polariserat, även om det infallande ljuset (dagsljus, solljus, strålkastarljus från andra bilar, ljus från gatlyktor och neonskyltar etc) är opolariserat. Det beror på att infallsvinkeln ofta ligger (mycket grovt) i närheten av Brewstervinkeln, så att det optiska fältet som är polariserat i infallsplanet – vertikalt – får en liten reflektion; fältet som är polariserat vinkelrätt mot infallsplanet – horisontellt polariserat – blir däremot kraftigt reflekterat eftersom det inte känner någon Brewstereffekt. Det reflekterade ljuset är alltså polariserat som visas i bilden till vänster.

Ljus reflekterat i horisontell yta



Polaroidglasögonen ska alltså släcka ut den kraftiga, horisontella, fältkomponenten. Polarisatorerna ska alltså blockera horisontalriktningen, vilket innebär att deras transmissionsriktning blir vinkelrät mot denna, alltså vertikal, som visas i högerfiguren.

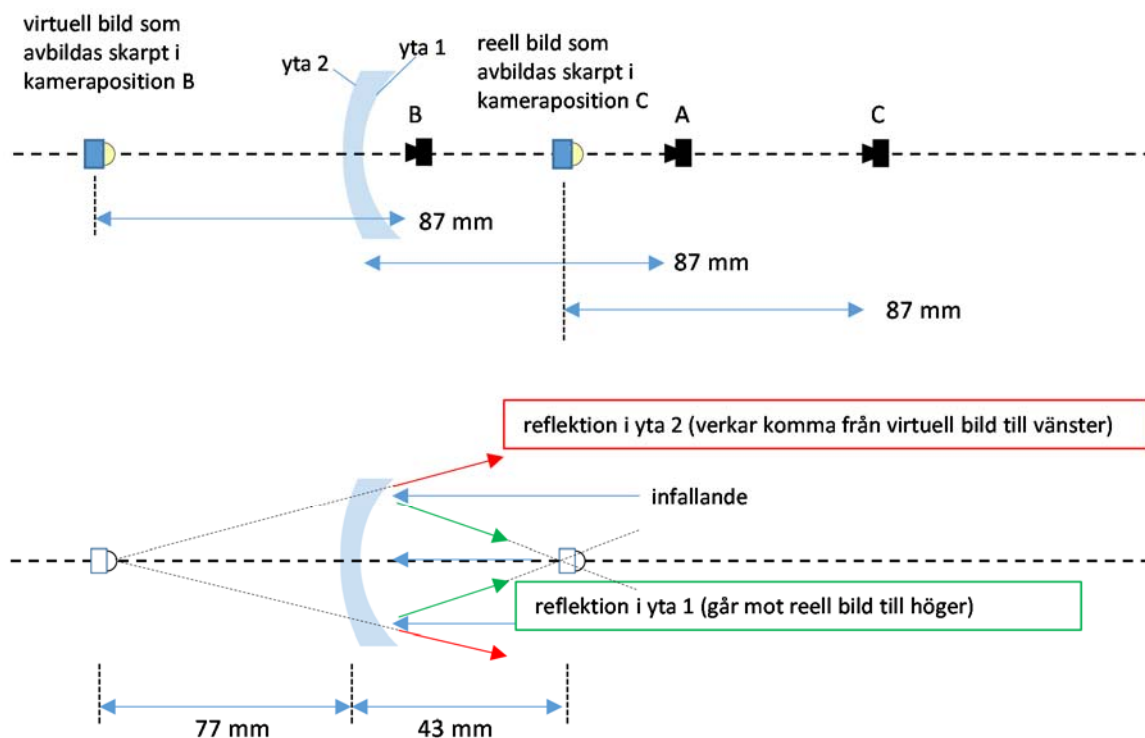
GPS-navigators LCD-skärm sänder ut linjärpolariserat ljus, eftersom sista komponenten som ljuset går igenom är en polarisator. Om skärmen är monterad enligt Variant B är ljuset som kommer ut från skärmen polariserat i horisontalriktningen, eftersom sista polarisatorn har horisontell transmissionsriktning enligt skissen. Detta ljus blockeras alltså av polaroidglasögonen! Det svartnar alltså bokstavligen för ögonen när man tar på sig glasögonen: GPS-navigators display blir svart. Inte bra! Så man monterar enligt Variant A där polarisationen hos ljuset ut från skärmen är parallell med transmissionsriktningen hos Ray Ban-glasen så att man kan läsa av GPS-navigatorsn.

(b)-(d): Estelles lösning är att limma på en film som omvandlar det linjärpolariserade ljuset till cirkulärpolariserat. Cirkulärpolariserat ljus saknar referensriktning, så att andelen ljus som tar sig igenom den efterföljande polarisatorn (RayBan-glasögonen) är oberoende av hur glasögonen är orienterad i förhållande till LCD-skärmen. Dessutom släpper en polarisator (RayBan-glasögonen) genom hälften av intensiteten hos cirkulärpolariserat ljus (den släpper ju igenom E-fältkomponenten i transmissionsriktningen medan den vinkelräta, lika stora, blockeras), så det svartnar aldrig för ögonen när föraren tittar på displayen (dock förlorar man som sagt halva intensiteten).

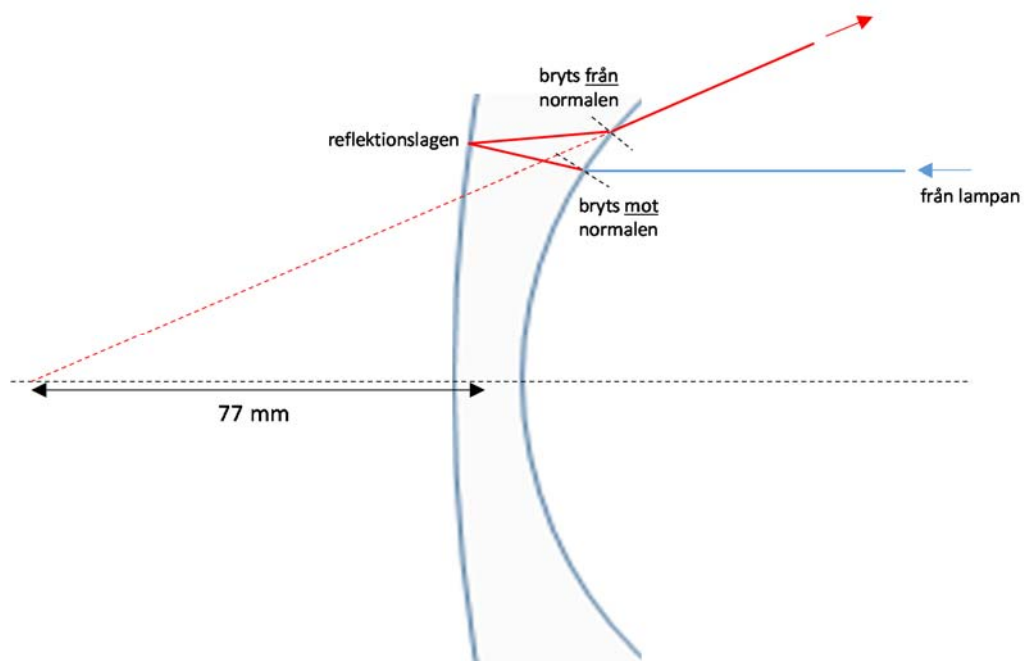
Det man måste se till är att pålimmade filmen verkligen skapar cirkulärpolariserat ljus. Som vi sett på föreläsningen kan detta åstadkommas med en retarder i form av en kvartsvågsplatta (som bl.a. ingår i 3D-glasögon på biografen). Om denna placeras med eo-axeln ("optiska axeln") hos det dubbelbrytande materialet i 45 graders vinkel mot det linjärpolariserade ljuset som faller in – alltså i 45 graders vinkel mot transmissionsriktningen hos den sista polarisatorn i LCD-skärmen – kommer fältet efter kvartsvågsplattan att vara cirkulärpolariserat. Enda haken är att kvartsvågsplattan är våglängdskänlig och bara fungerar optimalt för en våglängd (designvåglängden), som man lämpligen väljer mitt i det synliga området. I de blå och röda ändarna av spektrum produceras därför en aning icke-cirkulärt (d.v.s. elliptiskt) polariserat ljus, så att det blir en liten intensitetsvariation när RayBan-polarisatorn vrids i förhållande till filmen, men effekten är svag och man kommer aldrig i närheten av total utsläckning av skärmbilden.

5. Mitt handikapp – ditt problem!

(a) I position A ser kameran skarpt ett objekt (själva glasögonen) som ligger på avståndet 87 mm framför kameran. Eftersom inget ändras i kamerans inställning ser kameran skarpt på detta avstånd även då den befinner sig i position B och C. Eftersom den ser en skarp bild av lampan i dessa båda positioner betyder det att ena reflektionen i linsen ger en bild på avståndet $10\text{ mm} - 87\text{ mm} = -77\text{ mm}$ från linsen, alltså till vänster om linsen, se figur. Denna bild är alltså virtuell eftersom det fysiskt reflekterade ljuset bara existerar till höger om linsen. Den andra reflektionen ger alltså upphov till en bild på avståndet $130\text{ mm} - 87\text{ mm} = 43\text{ mm}$ från linsen, alltså till höger om linsen. Den är alltså reell – man kan t.ex. sätta in en skärm på detta avstånd från linsen (man får bara se till att inte skugga infallande ljus från lampan) och se en bild av lampan.



I mer detalj visas strålgången hos en stråle vid reflektion i yta 2 (som dock inte uttryckligen efterfrågades):

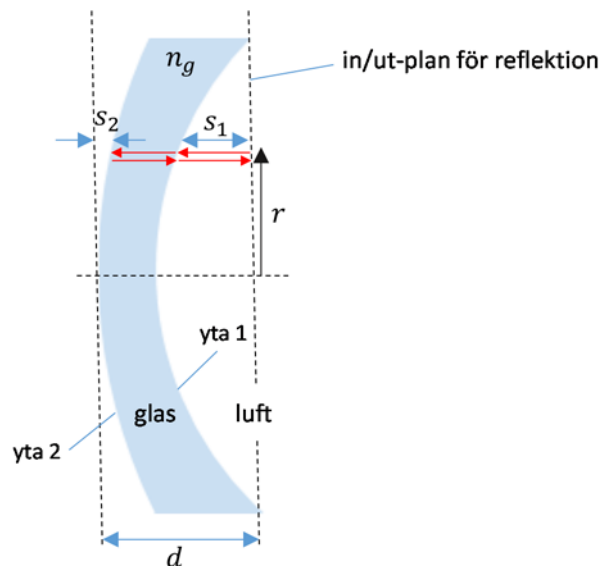


(b) Reflektionen i yta 1 är okomplicerad, det är en vanlig sfärisk konkav yta som samlar ihop ljuset från varje punktkälla på den oändligt avlägsna lampan till en verklig "punkt" (så gott som möjligt). Den ger alltså en reell bild av lampan. Men andra ord är det reflektionen i denna yta som ger den reella bilden på avståndet 43 mm till höger om linsen (och som fångas skarpt av kameran i position C)

(c) Som vi sett ger reflektionen i yta 1 ger en bild på avståndet 43 mm. Eftersom objektet är oändligt långt bort är avståndet till avbildningen lika med fokallängden för den speglade ytan, dvs $f = 43$ mm. För en sfärisk yta i luft gäller som bekant $f = \frac{R_1}{2}$, d.v.s. krökningsradie för yta 1 $R_1 = 2f = 86$ mm.

För att bestämma R_2 kan vi inte göra på samma sätt. Visserligen vet vi även i detta fall var bilden från reflektionen i denna yta hamnar, men framför denna yta finns en lager med glas av varierande tjocklek som också påverkar. Yta 2 är alltså inte en sfärisk yta som gränsar till luft utan ytan gränsar till en "negativ lins"; därmed gäller inte det enkla sambandet vi använde nyss mellan fokallängd och krökningsradie.

(d) Se skissen ovan där röda pilar markerar ljus som kommer från reflektion i yta 2 (som ju verkar komma från den virtuella bilden bakom spegeln), och gröna pilar markerar ljus från yta 1 (som ju skapar en reell bild framför spegeln).



(e) Fasmoduleringen enligt TOK-modellen är den fasmodulering ljuset får när det propagerar enligt de röda pilarna från in/ut-planet till yta 2, första sträckan i luft och sedan i glas, och tillbaka samma väg:

$$\varphi(r) = \varphi_{luft}(r) + \varphi_{glas}(r) + \varphi_{glas}(r) + \varphi_{luft}(r) = 2\{k_0 s_1(r) + k_0 n_g(d - s_2(r) - s_1(r))\}$$

Om vi sätter in de givna paraxiella approximationerna för sträckorna $s_1(r)$ och $s_2(r)$ fås

$$\varphi(r) = k_0 \left\{ 2 \cdot \text{const} \cdot (1 - n_g) + 2n_g d - \left(\frac{1 - n_g}{R_1} + \frac{n_g}{R_2} \right) r^2 \right\}$$

Vi stryker de två första termerna eftersom de är konstanta (r -oberoende), och därmed inte påverkar propagationen; vi får

$$\varphi(r) = -k_0 \left(\frac{1 - n_g}{R_1} + \frac{n_g}{R_2} \right) r^2 \equiv -k_0 \frac{r^2}{R_{ekv}}$$

där vi definierat krökningsradie R_{ekv} hos en spegelyta i luft som ger samma fasmodulering; alltså

$$R_{ekv} = \frac{1}{\frac{1-n_g}{R_1} + \frac{n_g}{R_2}}$$

(f) Den reflektion som åstadkoms av ljuset som går genom linsen och reflekteras i yta 2 ger upphov till en virtuell bild på avståndet -77 mm från linsen, alltså till vänster om linsen. Fokallängden är alltså just -77 mm eftersom objektet är oändligt långt bort. Om detta ska åstadkommas av en spegel i luft innebär detta att dess krökningsradie ska ges av den vanliga formeln

$$R_{ekv} = 2 \cdot \text{fokallängden} = 2 \cdot (-77\text{ mm}) = -154\text{ mm}$$

Tecknet på R_{ekv} är rimligt; det ska vara negativt eftersom ytan ska vara konvex, alltså sprida det infallande ljuset så att det verkar komma från ett föremål till vänster om spegeln.

(g) Vi sätter uttrycket för R_{ekv} som funktion av linsparametrarna från e) lika med det experimentellt bestämda värdet på R_{ekv} från f) och löser ut R_2

$$R_2 = \frac{n_g}{\frac{1}{R_{ekv}} - \frac{1-n_g}{R_1}} = \frac{1.67}{\frac{1}{-154\text{ mm}} - \frac{1-1.67}{86\text{ mm}}} = 1287\text{ mm} \approx +1.3\text{ m}$$

Värdet på R_2 är större än noll, d.v.s. yta 2 buktar åt samma håll som yta 1, vilket stämmer med skissen. Vi ser dock att R_2 är mycket större än R_1 , d.v.s. mer lik en plan yta. Detta gör att direktreflexerna i denna yta för ljus som faller in från vänster, d.v.s. som en person i glasögonbärandarens omgivning uppfattar det, kanske verkar lite nördiga, lite som "reflektion i fönsterglas" (d.v.s. plant glas, med oändlig krökningsradie).