

Tentamen i Fasta tillståndets fysik (FFY012/FYP330)

Tid och plats: 2017-03-16, kl. 14:00-18:00, "Maskin"-salar.

Examinatorer: Mats Granath och Mattias Thuvander (073 473 37 09).

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook, penna, sudd, passare, linjal, typgodkänd räknare eller annan räknare i fickformat utan inprogrammerad text/ekvationer relevant för duggan och ett egenproducerat A4 (dubbelsidigt) med valfritt innehåll.

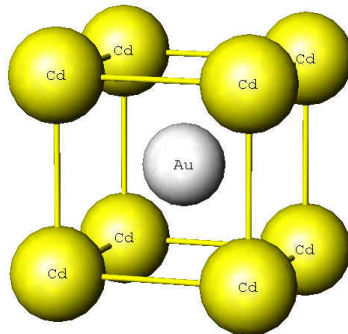
Bedömning: Max 20p. Betyg Chalmers: 3 – 10p, 4 – 14p, 5 – 17p. Betyg GU: G – 10p, VG – 15p. Granskning 2017-04-07, 11:45 i lunchrummet Soliden, våning 3.

Skriv tydligt och motivera dina svar. Lycka till!

1. I figuren visas enhetscellen för AuCd (med kubsida a).

a) Beskriv strukturen i termer av Bravais-gitter och bas. (2p)

b) Beräkna strukturfaktorn. (2p)



2. En enkristall av guld undersöks i ett LEED experiment. Provets yta är en (100)-yta och den belyses vinkelrätt med elektroner med energin 120 eV. Beräkna vilka vinklar de diffrakterade strålarna bildar med den inkommande strålen och ange hur många diffrakterade strålar det blir. (4p)

Uppgift 3

För aluminium vid rumstemperatur är Hallkoefficienten $R_H = -0.4 \cdot 10^{-10} \Omega\text{m}/\text{T}$ och resistiviteten $\rho = 2.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Antag fria elektronmodellen och Drudemodellen för resistivitet.

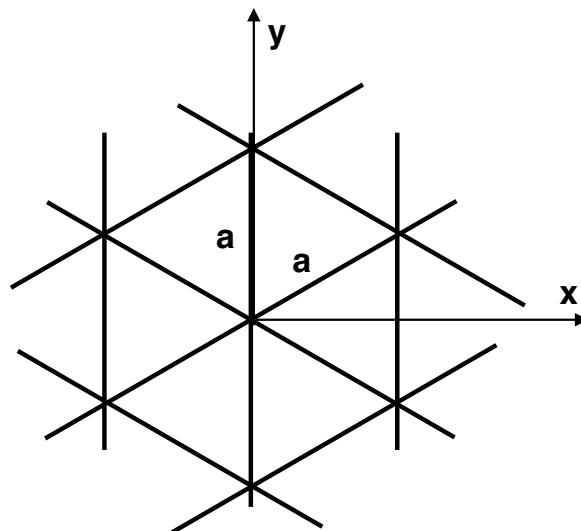
- Uppskatta Fermienergin ϵ_F i elektronvolt (eV) och motsvarande Fermihastighet v_F i m/s. (2p)
- Beräkna relaxationstiden τ i Drudemodellen, samt elektronens medelfria väg $\ell = v_F\tau$ (2p)

Var noga med att bekräfta att storleken på v_F och ℓ är fysikaliskt rimliga!

Uppgift 4

En 2-dimensionell metall har hexagonal struktur med gitterkonstant a och f ledningselektroner per gitterpunkt.

- Skriv ner primitiva gittervektorer och härled motsvarande reciproka gittervektorer. Skissa första Brillouinzonen. (1p)
- Antag fria elektroner. Beräkna f givet att Fermiytan tangerar kanten på 1st BZ. (2p)
- I en tight-binding model ges parametern för överlapp mellan närmaste grannar på gittret av $-t$. Härleda uttrycket för energin för bandet. (1p)



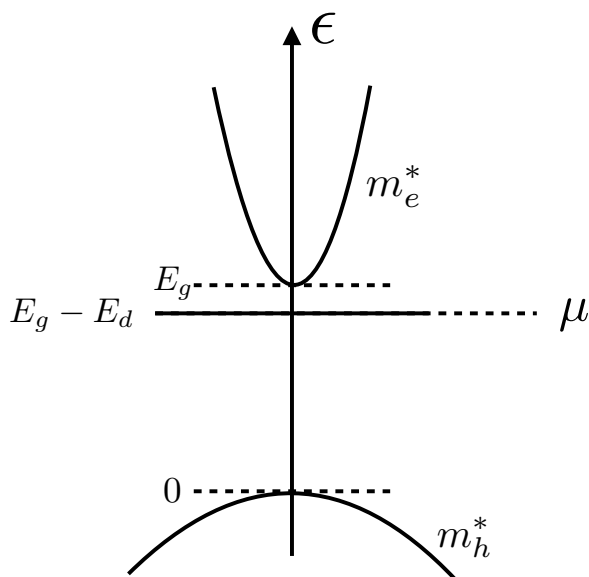
Figur 1: 2-dimensionell hexagonal kristall med gitterkonstant a .

Uppgift 5

En n-dopad halvledare har en täthet av $2.0 \cdot 10^{29}$ atomer per m^3 . En av 1000 atomer har ersatts av en donatoratom med en extra valenselektron. Effektiva massor ges av $m_e^* = 0.8m_e$ och $m_h^* = 1.5m_e$, där m_e är den fria elektronmassan. Bandgapet är $E_g = 1\text{eV}$ och donatorenergin $E_d = 50\text{meV}$.

Temperaturen är sådan att den kemiska potentialen ligger vid donatornivån $\mu = E_g - E_d$.

- Vad är tätheten av joniserade donatoratomer (n_d^+)? (1p)
- I uttrycket för laddningsneutralitet kan man försumma håltätheten p . Förklara varför. (1p)
- Beräkna temperaturen givet informationen från (b). (1p)
- Standarduttrycken för n och p förutsätter att $E_g - \mu \gg k_B T$ och $\mu \gg k_B T$. Ta hänsyn till att det första villkoret inte gäller för att göra en mer korrekt beräkning av temperaturen. (Man kan behöva integralen $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x + 1} \approx 0.68$) (1p)



Figur 2: Skiss av bandstruktur för dopad halvledare i uppgift 5

Lycka till!
Mattias och Mats

① a) Bravaisgitter är SC (simpelt kubiskt, enkelt kubiskt)
 Bas: Cd $(0, 0, 0)$, A_4 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 (eller tvärtom)

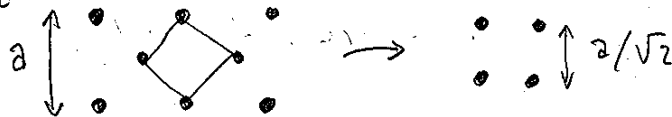
$$b) S_{\theta} = \sum_j f_j e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_j} = \sum_j f_j e^{-i(hb_1 + kb_2 + lb_3) \cdot (x_j a_1 + y_j a_2 + z_j a_3)}$$

$$= f_{Cd} e^{-i0} + f_{A_4} e^{-i(h \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi + k \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi + l \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi)}$$

$$= f_{Cd} + f_{A_4} e^{-i\pi(h+k+l)} = \begin{cases} f_{Cd} + f_{A_4} & \text{om } h+k+l = 2n \text{ (jämnt)} \\ f_{Cd} - f_{A_4} & \text{om } h+k+l = 2n+1 \text{ (udda)} \end{cases}$$

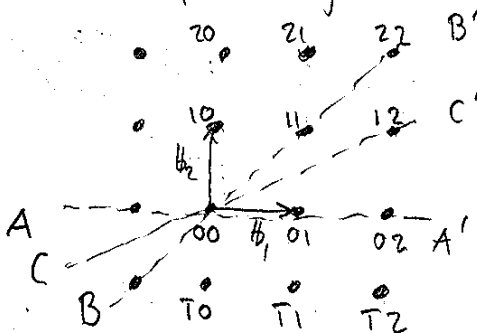
② Guld är fcc med $a = 4.08 \text{ \AA}$ (Phys. Handb.)
 LEED \rightarrow vi ska studera gittret i 2D.

(100) yta



Reciproka gittret (2D) $b_1 = \frac{2\pi}{a} \sqrt{2} \hat{x}'$, $b_2 = \frac{2\pi}{a} \sqrt{2} \hat{y}'$

$$|b_1| = |b_2| = \frac{2\pi}{a} \sqrt{2} = 2.18 \text{ \AA}^{-1}$$

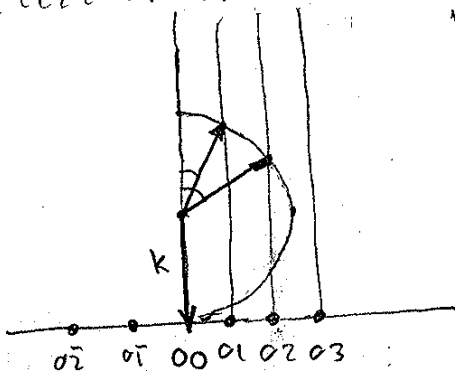


$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{(2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 120 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19})^{1/2}} = 1.12 \text{ \AA}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5.61 \text{ \AA}^{-1}$$

Vi ser att k är ganska stor jämfört med b
 \rightarrow vi får ganska många strålar.

Snittet A-A'



Här får vi fyra diffrakterade strålar ($o_1, o_2, o\bar{1}, o\bar{2}$)

I snittet vinkelrätt mot detta får vi ($1_0, 2_0, 1_0, 2_0$)

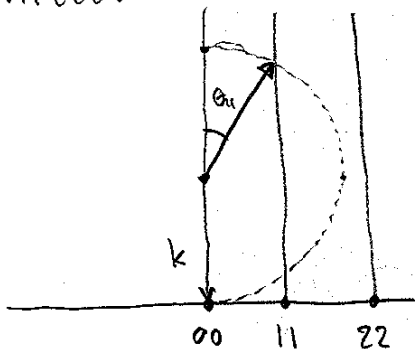
För strålarna $o_1, o\bar{1}, 1_0$ och 1_0 blir vinkeln

$$\theta_{o_1} = \arcsin \frac{2,18}{5,61} = \underline{\underline{22,9^\circ}}$$

För strålarna $o_2, o\bar{2}, 2_0$ och 2_0 blir vinkeln

$$\theta_{o_2} = \arcsin \frac{2 \cdot 2,18}{5,61} = \underline{\underline{51,0^\circ}}$$

Snittet B-B'

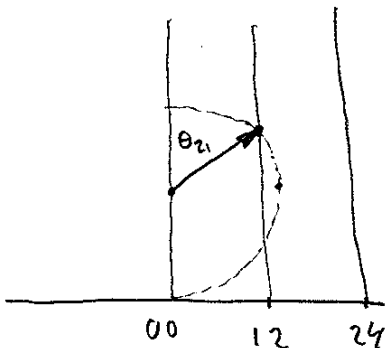


$$\text{Avstånd } 11-o_0 = \sqrt{2} \cdot 2,18 = 3,08$$

För de fyra strålarna $1_1, \bar{1}_1, 1\bar{1}$ och $\bar{1}1$ fås

$$\theta_{11} = \arcsin \frac{3,08}{5,61} = \underline{\underline{33,3^\circ}}$$

Snittet C-C'

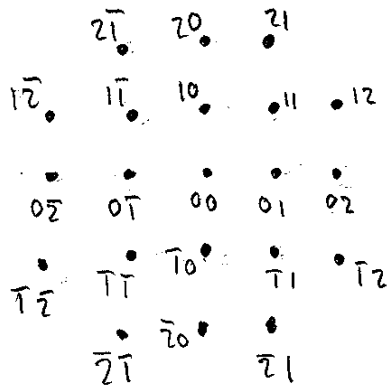


$$\text{Avstånd } 12-o_0 = \sqrt{2,18^2 + (2 \cdot 2,18)^2} = 4,87$$

$$\theta_{21} = \arcsin \frac{4,87}{5,61} = \underline{\underline{60,3^\circ}}$$

Detta ger ytterligare åtta strålar $1_2, \bar{1}_2, 1\bar{2}, \bar{1}2, 2_1, \bar{2}_1, 2\bar{1}, \bar{2}\bar{1}$

Sett uppifrån ser det ut så här



Vi får alltså 20 diffrakterade strålar
(eller 21 om den reflekterade 00 räknas).

(3) $|R_H| = \frac{1}{ne} \Rightarrow n = \frac{1}{|R_H|e} = \boxed{\text{Tenta 170316}}$
 $= 1,56 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$

a) $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \approx \boxed{10,6 \text{ eV}} \quad (1,7 \cdot 10^{-18} \text{ J})$

$v_F = \left[\epsilon_F = \frac{1}{2} m v_F^2 \right] = \sqrt{2\epsilon_F/m} \approx \boxed{1,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}}$

b) τ ur $\theta = \frac{1}{g} = \frac{ne^2\tau}{m} \Rightarrow \tau = \frac{m}{ne^2g} = \frac{m|R_H|}{e^2g} \approx \boxed{8,4 \cdot 10^{15} \text{ s}}$

$l = v_F \tau \approx \boxed{160 \text{ \AA}}$

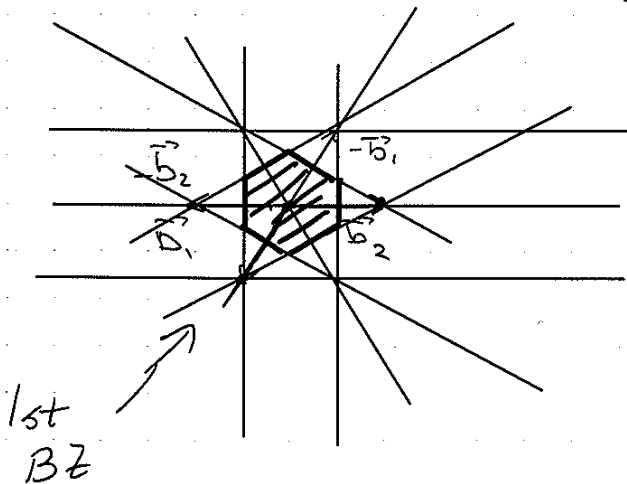
$v_F \approx l/200$ verker ok, $l \approx 30-40$ gitterenheter ser ok ut
 (dus, inget uppenbart orimligt)

(4) $\vec{r}_1 = a\hat{y}$ (ex. vis)

a) $\vec{r}_2 = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)$

$\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 = 2\pi \delta_{ij} \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a} \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{x} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \hat{x}$

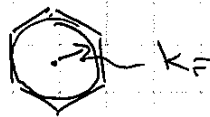
$\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a} \left(\hat{y} - \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{x} \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} - \frac{1}{2} \hat{x} \right)$



b) t tthet $n = \frac{f}{V_{\text{cell}}}$ $V_{\text{cell}} = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$

kortaste avst nd till BZ kanten $\frac{1}{2}|\vec{b}_2| = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}$

$\therefore k_F = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}$



2D

$N = \frac{A}{2\pi^2} \cdot \pi k_F^2$

$\frac{N}{A} = n$

$k_F^2 = 2\pi n \iff \frac{4\pi^2}{3a^2} = 2\pi \cdot \frac{2f}{\sqrt{3}a^2}$

$f = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.8$

c) $\chi_{\vec{k}} = -t \sum_{\vec{r}, \text{grannar}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \left[\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right]$

$= -t \left(e^{-ik_y a} + e^{ik_y a} + e^{-i(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + \frac{1}{2}k_y a)} + e^{i(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + \frac{1}{2}k_y a)} + e^{-i(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - \frac{1}{2}k_y a)} + e^{i(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - \frac{1}{2}k_y a)} \right)$

$= -2t \left[\cos k_y a + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + \frac{1}{2}k_y a\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - \frac{1}{2}k_y a\right) \right]$

(om man vill $-2t \left[\cos k_y a + 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_x a \cdot \cos \frac{1}{2}k_y a \right]$)

5) a) $n_{d^+} = n_d / (e^{-(E_g - E_d - \mu)/k_B T} + 1) = \frac{1}{2} n_d$
 $n_{d^+} = 2 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$

b) $n = p + n_{d^+}$

$n = 4.83 \cdot 10^{21} \left(\frac{m_e^*}{m_e}\right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{(E_g - \mu)/k_B T}{e^{-E_d/k_B T}}} \text{ m}^{-3}$

$p = 4.83 \cdot 10^{21} \left(\frac{m_h^*}{m_h}\right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\mu/k_B T} \text{ m}^{-3}$

$E_d \ll \mu$ $\therefore e^{-\mu/k_B T} \ll e^{-E_d/k_B T}$
 " " " " $\therefore e^{-\mu/k_B T} \ll e^{-E_d/k_B T}$
 0.1 eV 0.9 eV

c) församma p

$n = \frac{1}{2} n_{d^+} = 10^{26}$

$4.83 \cdot 10^{21} (0.8)^{3/2} T^{3/2} e^{-E_d/k_B T} = 10^{26}$

antag $T \gg \frac{E_d}{k_B} = 500 \text{ K}$
 $e^{-E_d/k_B T} \approx 1$

$T = \frac{1}{0.8} \left(\frac{10^{26}}{4.83}\right)^{2/3} \approx 940 \text{ K}$ ganska OK

d) Gåller inte $(E_g - \mu) \gg k_B T$ Då måste vi approx ED på annat sätt

$N = \int_0^\infty D(\epsilon) d\epsilon n_{FD}(\epsilon)$
 $= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} \frac{1}{e^{(E_d + \epsilon)/k_B T} + 1} d\epsilon$

integreren $\int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\epsilon/k_B T} + 1} = (k_B T)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x + 1} \approx 0.68$

$\Rightarrow n = \frac{N}{V} = \frac{0.68}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2} k_B\right)^{3/2} \left(\frac{m_e^*}{m_e}\right)^{3/2} T^{3/2}$
 $\approx 3.7 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ \therefore gör ingen stor skillnad!