Tentamen i Fasta tillståndets fysik

ffy012, ffy011, samt fyp330 (GU)

Tid och plats: fredag 17/4, 2015, 8.30 i H salar.

Examinatorer:

Mats Granath, 7869026, 0723087160, mats.granath@physics.gu.se
Maths Karlsson, 7728038, 0723526106, maths.karlsson@chalmers.se

Hjälpmedel: Penna, suddgummi, Beta, Physics Handbook, egen formelsamling på ett A4-blad (fram- och baksidan), typgodkänd räknare eller annan räknare i fickformat dock utan inprogrammerad text eller ekvationer av intresse för tentan.

Bedömning: Kursbetyget är baserat på summan av tentamenspoängen +40 % av duggapoängen. Gränserna är: 10p≤3<14p, 14p≤4<17p, 5≥17p. GU: 10p≤G<15p, VG≥15.

Rättningsgranskning: Onsdag 6/5, kl 12.00-13.00, lunchrum Soliden pl3.

Uppgift 1

Förklara begreppen:

a) Wigner-Seitz cell (beskriv i ord och rita en förklarande figur) (1p)

b) Atomär formfaktor (beskriv i ord och visa med figur hur formfaktorn beror på atomnummer) (1p)

c) Umklapp-process (beskriv i ord och rita en förklarande figur) (1p)

d) Dislokation (beskriv i ord och rita en förklarande figur, beskriv/rita också hur dislokationen kan röra på sig) (1p)

Uppgift 2

Vid ett röntgendiffraktionsexperiment ($\lambda = 1.54$ Å) på en enkristall av järn (BCC struktur), så uppmätts diffraktionsvinkeln 22° för diffraktion mot (110)-planen.

a) Beräkna järns gitterparameter. (2p)

b) Vad är Braggvinkeln för diffraktion mot (111)-planen? (1p)

c) Skulle man kunna använda synligt ljus för att bestämma järnprovets kristallstruktur (d.v.s genom diffraktion med användandet av synligt ljus)? Motivera ditt svar. (1p)

Uppgift 3

En ren kristall av kisel (Si) är en halvledare som vid en temperatur $T = 300$K har följande värden på viktiga storheter: Bandgap $E_g = 1.1$eV; effektiv massa $m_e^* = 1.1m_e$ samt $m_h^* = 0.8m_e$ för elektroner respektive hål (m_e är fri elektron massa); samt mobilitet $\mu_e = 0.15m^2/Vs$ och $\mu_h = 0.05m^2/Vs$ för elektroner respektive hål.

a) Vilka av laddningsbärarna har längst kollisionstid τ?

b) Vilket tecken på Hallkoefficienten R_H förväntas man uppmäta.

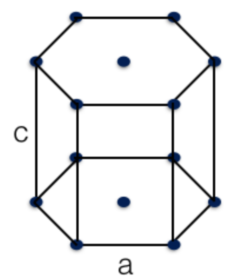
c) Hur stor konduktivitet σ förväntas man uppmäta.

d) Rita en bild av banden (valens och ledning) inklusive läget för kemiska potentialen μ enligt standardformat (dvs. en projektion längs en riktning i k-rummet). I bilden ska tydligt framgå bandens relativa krökning (vilket band har störst krökning) samt μ relativt band-top och botten.

Uppgift 4

a) För en fcc-kristall med enkel kubisk gitterparameter a finns ett maxantal elektroner N_g per gitterpunkt för att en ideal sfärisk fermiyta ska få plats i första Brilloinzonen. Visa att detta maxantal är $N_g \approx 1.36$.

b) Visa att motsvarande storhet, för en hexagonal kristall med gitterparametrar a och c (se figur) och givet $c = 2a$ är $N_g \approx 0.79$. **Fel i tesen. Svaret ska vara** $N_g \approx 0.23$



Uppgift 5

En ideal fermigas bestående av N stycken spinn-$\frac{3}{2}$ partiklar med massa m befinner sig i en (effektiv) tvådimensionell låda med area A (2D-täthet $n = N/A$) i ett konstant magnetfält $\vec{B} = B\hat{z}$, vid noll temperatur. Fermionernas energi i magnetfältet beroende på S^z-kvanttal (m) är $E_m = -2\mu_B B m$, där $m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Energin för en fermion är följaktligen $\epsilon_{\vec{k},m} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) + E_m$. Beräkna andelen fermioner med respektive värde på m: N_m/N genom att minimera systemets totala energi. (Svaret ges i givna symboliska storheter.)

Ett lämpligt sätt att kvantifiera problemet kan vara att skriva partikelantalen via tre koordinater (x, y, z) där $N_{\frac{3}{2}}/N = 1/4 + x$, $N_{\frac{1}{2}}/N = 1/4 + y$, $N_{-\frac{1}{2}}/N = 1/4 + z$, och $N_{-\frac{3}{2}}/N = 1/4 - x - y - z$ och miniminera energin med avseende på dessa.

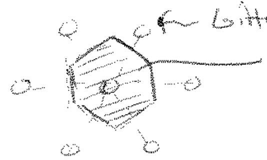
Lycka till!
Maths och Mats

Lösningsförslag Tenta 15-04-17 FFY012/FFY011/FYP330

1a) Wigner-Seitz cell:

Området som begränsas mittpunktsnormalerna/planen mellan en specifik gitterpunkt och dess närmaste grannar.

Ex)



b) Atomär formfaktor

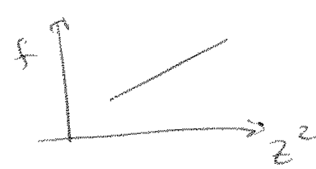
- Beskriver hur stark spridningen är för en viss atom (ett visst atomslag)

$$S_G = \sum_{j=1}^{s} f_j e^{-i\bar{G}\cdot \bar{r}_j}$$

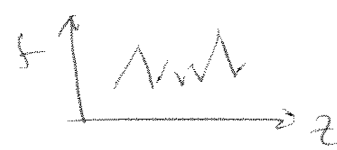
Starkare spridning ju fler elektroner.

f (X-ray) $\propto Z^2$

(Z = atomnummer)

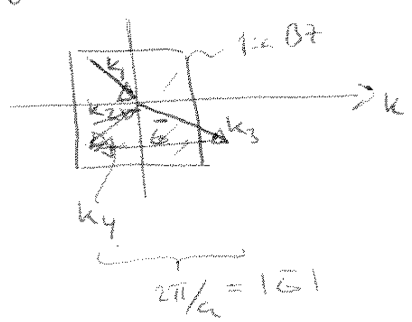


För neutroner (vilka växelverkar med atomens kärna), så har vi ett annat beroende; oregelbundet samband med atomnummer



c) Umklapp-process

Fonon-Fonon-spridning, då nya vågvektorn går åt motsatt håll till de ingående. Detta betyder att fononernas grupphastighet byter håll (leder till termisk resistivitet)

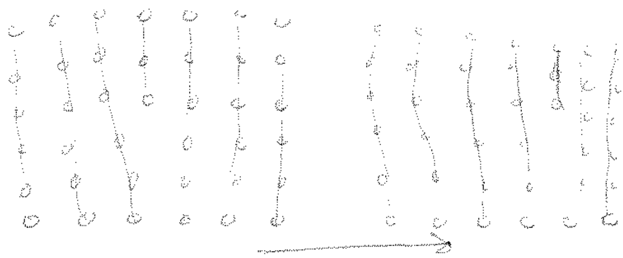


k_1, k_2 } ingående

k_3 ligger utanför 1BZ, och byter då håll till k_4. k_4 är resulterande vågvektor

1d) Dislokation = linjedefekt

- Halvatomplan instuckt mellan ordinarie plan, med lägre bindningsstyrka
- Dislokation rör sig genom kristallen genom att bryta en bindning åt gången (, i tätpackade plan och tätpackade riktningar)



Se hellre föreläsningsanteckn för en snyggare bild på hur dislokation rör sig.

2a) Röntgendiffraktion, $\lambda = 1.54$ Å, på enkristall av järn (Fe)

Fe har BCC-struktur

Diffr. vinkeln $\theta = 22°$ uppmätts för diffr. mot (110)-planen.

a) Fe's gitterparameter?

Bragg $\Rightarrow 2d \sin\theta = \lambda$, $d = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} \Rightarrow d_{110} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \sin\theta = \lambda \Rightarrow a = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1.54}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin(22°)}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{a = 2.91 \text{ Å}}}$

b) Vad är Braggvinkeln för diffr. mot (111)-planen

- Diffr. mot (111) är 'förbjuden' eftersom $h+k+l=3$

För BCC gäller att $h+k+l$ = jämnt tal $\Rightarrow$ diffraktion.

c) Braggs lag: $2d \sin\theta = m \cdot \lambda$

- Detta betyder att $\lambda \leq 2d$

Då d är av storleksordningen 1 Å får man problem, eftersom λ(ljus) $\simeq$ 5000 Å. Dvs för långa våglängder.

3 $E_g = 1.1\,eV$ $m^*_e = 1.1 m_e$ $m^*_h = 0.8 m_e$, $\mu_e = 0.15 \frac{m^2}{Vs}$, $\mu_h = 0.05 \frac{m^2}{Vs}$

a) $\mu = \frac{e\tau}{m^*}$ $\Rightarrow$ eftersom $\mu_e > \mu_h$ samtidigt som $m^*_h < m^*_e$, kräus $\boxed{\tau_e > \tau_h}$

b) R_H Intrinsisk så $n = p$ $\Rightarrow$ högst μ dominerar

$\Downarrow$

$\boxed{R_H < 0}$

c) $\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h = ne(\mu_e + \mu_h)$

$n = \sqrt{np} = \sqrt{n_0 p_0}\, e^{-E_g/2k_BT}$ ur P.H.

där $\sqrt{n_0p_0} = 4.83 \cdot 10^{21}\, T^{3/2} \left(\frac{m^*_e m^*_h}{m_e^2}\right)^{3/4} m^{-3}$

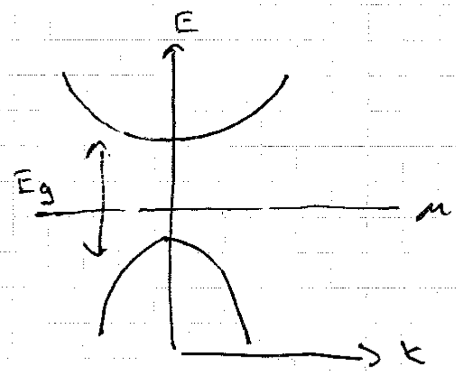
$\approx 2.28 \cdot 10^{25}\ m^{-3}$

$n \approx 1.26 \cdot 10^{16}\ m^{-3}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma \approx 4.0 \cdot 10^{-4}\ \Omega^{-1} m^{-1}}$ $\quad \rho \approx 2.5 \cdot 10^{3}\ \Omega m$

d) $m^*_e > m^*_h$ $\Rightarrow$ ledningsbandet är plattare (mindre krökning)

kemisk pot. $\mu = \frac{1}{2}E_g + \underbrace{\frac{3}{4}k_BT \ln \frac{m^*_h}{m^*_e}}_{<0}$ $\quad$ μ är närmare valensbandet



④ a) För att bestämma storleken på sfär som får plats i 1sta BZ behöver vi kortaste reciproka gittervektor.

För fcc. har vi gittervektorer av typen

$$\vec{b} = \frac{2\pi}{a}(1,1,1)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} k_F = \frac{1}{2}|\vec{b}_1| = \frac{\pi}{a}\sqrt{3} \\ \quad \shortparallel \\ (3\pi^2 n)^{1/3} \quad ; \text{ och } n = \frac{4N_a}{a^3} \end{array}\right\} \Rightarrow 3\pi^2 \frac{4N_a}{a^3} = 3^{3/2}\frac{\pi^3}{a^3}$$

$$\boxed{N_a = \frac{3^{3/2}\pi}{12} \approx 1.36}$$

b) tag gittervektorer:

$$\vec{a}_1 = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right) \quad \vec{a}_2 = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right) \quad \vec{a}_3 = c\hat{z}$$

reciproka $\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y}\right)\cdot\frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \Rightarrow |\vec{b}_1| = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} = |\vec{b}_2|$

$$\vec{b}_3 = \frac{2\pi}{c}\hat{z} \Rightarrow |\vec{b}_3| = \frac{2\pi}{c} = \frac{\pi}{a} < |\vec{b}_1|$$

$$\Rightarrow k_F = \frac{1}{2}|\vec{b}_3| = \frac{\pi}{2a}$$

$$\shortparallel$$

$(3\pi^2 n)^{1/3}$; Volymen för primcell: $|(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3| =$

$$= a^2 c \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\hat{z} + \frac{\sqrt{3}}{4}\hat{z}\right)\cdot\hat{z}\right| = \sqrt{3}\,a^3$$

$$n = \frac{N_a}{\sqrt{3}a^3}$$

$$3\cancel{\pi^2}\frac{N_a}{\sqrt{3}\cancel{a^3}} = \frac{\pi^{\cancel{3}}}{8\cancel{a^3}} \Rightarrow \boxed{N_a = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \approx 0.23}$$

OBS! Det var alltså fel i uppgiftstexten!

(3) för hela systemet:

magn. energi $E_B = \mu_B B\left(3N_{-3/2} + N_{-1/2} - N_{1/2} - 3N_{3/2}\right)$

kinetisk energi: fyra olika Fermivågtal k_{Fm}

$$E_{kin,m} = \frac{A}{(2\pi)^2}\int_0^{k_{Fm}} \frac{\hbar^2}{2m}k^2 d^2k = \frac{A\hbar^2}{16\pi m}(k_{Fm})^4$$

OBS, inte samma m

och $k_{F,m}$ enligt $N_m = \frac{A}{(2\pi)^2}\int_0^{k_{Fm}} d^2k = \frac{A}{4\pi}(k_{Fm})^2$

$$\Downarrow$$

$$(k_{Fm})^2 = \frac{4\pi}{A}N_m$$

ställ upp enligt uppgiftstext! (släng konstant bit)

$$E = -\mu_B BN(6x + 4y + 2z) +$$

$$+ \frac{A\hbar^2}{16\pi m}\left(\frac{4\pi}{A}\right)^2 N^2\left[\left(\tfrac{1}{4}+x\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}+y\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}+z\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}-x-y-z\right)^2\right]$$

$$= -a(3x+2y+z) + b[\quad]$$

där $a = 2\mu_B BN$ och $b = \pi\frac{\hbar^2}{m}n \cdot N$

minimera: $\frac{\partial}{\partial x}(\ ) = 0$ ...

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -3a + 2b\left(\tfrac{1}{4}+x\right) - 2b\left(\tfrac{1}{4}-x-y-z\right) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -2a + 2b\left(\tfrac{1}{4}+y\right) - 2b\left(\tfrac{1}{4}-x-y-z\right) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -a + 2b\left(\tfrac{1}{4}+z\right) - 2b\left(\tfrac{1}{4}-x-y-z\right) = 0$$

$$2x + y + z = \frac{3}{2}\frac{a}{b}$$

$$x + 2y + z = \frac{a}{b}$$

$$x + y + 2z = \frac{1}{2}\frac{a}{b}$$

5 fort. lös ekv. systemet $\Rightarrow$

$$x = \frac{3}{4}\frac{a}{b}, \quad y = \frac{1}{4}\frac{a}{b}, \quad z = -\frac{1}{4}\frac{a}{b}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{\mu_B B}{\pi \frac{\hbar^2}{2m} n}}$$

magnetisk energi / kinetisk energi

$$N_{\frac{3}{2}} = N\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{a}{b}\right)$$

$$N_{\frac{1}{2}} = N\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{a}{b}\right)$$

$$N_{-\frac{1}{2}} = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{a}{b}\right)$$

$$N_{-\frac{3}{2}} = N\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\frac{a}{b}\right)$$