

TENTAMEN I FASTA TILLSTÅNDETS FYSIK F3/KF3 – FFY011

Tid: 2010-03-12 förmiddag

Lokal: Hörsalsvägen

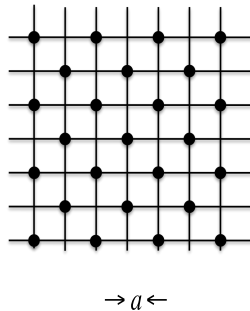
Hjälpmedel: Matematiska tabeller, Physics Handbook, bifogad formelsamling, typgodkänd räknare eller annan räknare i fickformat dock utan inlagd text eller ekvationer av intresse för tentamen. Däremot är det OK att i räknarens minne ha värden på naturkonstanter som Plancks konstant och elektronmassan. Kursbetyget är baserat på summan av tentamenspoängen +40 % av duggapoängen. Gränserna är: $9p < 3 < 14p$, $14p \leq 4 < 17p$, $5 \geq 17p$. Granskningen: 26/3 kl 13-15 i F5117.

Examinator: Igor Zoric
Jari Kinaret

tel: 3371, 0708 30 47 25

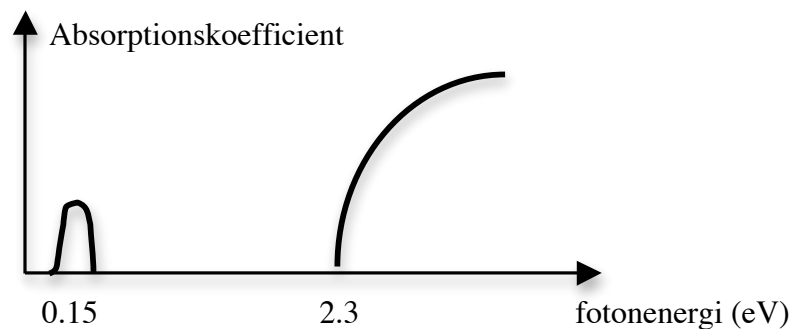
tel: 3668, 0706 45 72 68

1. Figuren nedan visar en hypotetisk tvådimensionell kristall där atomerna är periodiskt fördelade på ett kvadratisk gitter.
 - a) Rita ett exempel för en primitiv cell och definiera basvektorer som spänner primitiva cellen (1p).
 - b) Tag reda på primitiva translationsvektorer i reciproka rummet och rita reciproka gittret (2p).
 - c) Konstruera Wigner-Seitz cellen i reciproka rummet samt 1sta Brillouin zonen (1).



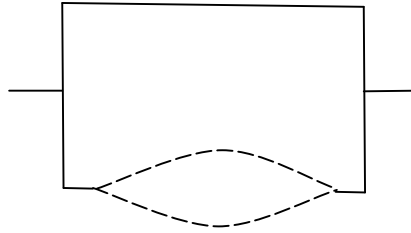
2. I en diffraktionsexperiment på en ytcentrerad kubisk C_{60} kristall (gitter parameter $a=14.436\text{\AA}$) observerar man (Fleming et al., Nature, **352**, 701, 1971) att intensiteterna hos (200) och (111) reflexerna skiljer sig enormt mycket. Basen i kristallen är en C_{60} molekyl (Buckeyball-består av 60 st C atomer med 6 elektroner per atom) med strukturen som liknar ett sfäriskt skal med radien $R=3.5\text{\AA}$. Elektrontätheten i molekylerna kan beskrivas med följande ekvation $n(r)=A\delta(r-R)$ där $n(r)$ är elektrontätheten vid avståndet r från C_{60} centrum, $\delta(r)$ är det vanliga delta funktionen och A är en konstant. Beräkna:

- a) Amplituderna för (200) samt (111) diffraktionsreflexerna med antaganden at spridningsfaktorn f för C_{60} molekylerna är konstant (0.5p).
 - b) Konstanten A utifrån det kända antalet elektroner i molekylerna ($6 \times 60 = 360$ elektroner) (1p).
 - c) Spridningsfaktorn $f_{C_{60}}(G)$ som funktion av reciproktgittertranslationsvektorn G (2p).
 - d) Amplituderna för (200) samt (111) reflexerna utifrån resultatet i c) (0.5p).
- 3) Figuren nedan visar hur absorptionskoefficient för ljus varierar som funktion av fotonenergi i en okänd kristall. Man observerar absorptionen inom ett tunt område i infraröda delen av EM spektrum (omkring 0.15eV). Ingen ytterligare ljusabsorption observeras förrän man når 2.3eV i fotonenergi.
 - a) Förklara kortfattat energiberoendet hos den observerade absorptionskoefficienten (2p).
 - b) Är kristallen en metall eller en isolator (1p)?
 - c) Finns det mer än en atom i enhetscellen hos kristallen (motivera ditt svar) (1p)?



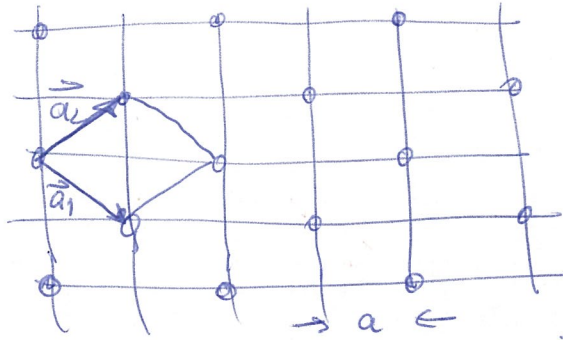
- 4) Förklara följande begrepp, och för varje begrepp ge ett exempel på experiment, som kan användas för att studera fenomenet eller vars resultat påverkas avsevärt av fenomenet (1p varje del):
 - a) fonon
 - b) plasmon
 - c) magnon
- 5) a) Beskriva de magnetiska egenskaperna av typ 2 supraledare (3p).
 - b) En DC SQUID (se figuren nedan) består av en loop där en av armarna kan vibrera i sidled. SQUIDen är så designat att den maximala strömmen genom den är I_0 . Mätutrustningen som SQUIDen är kopplat till kan mäta strömmen till en

noggrannhet av $10^{-4} I_0$. Hela SQUIDen är placerat i ett externt, uniformt, konstant magnetfält $B = 100$ mT som är riktat normalt mot SQUIDens plan. SQUIDen används för att bestämma vibrationsamplituden av den rörliga armen. Beräkna med vilken noggrannhet kan amplituden bestämmas om den rörliga armens längd är $1 \mu\text{m}$ och SQUIDens area är $1 \mu\text{m}^2$ när den rörliga armen är rak (2p).



Lycka till!
Igor och Jari

① a) Primitiv enhetscell:



$$\vec{a}_1 = a(\hat{i} - \hat{j}) = a(1, -1)$$

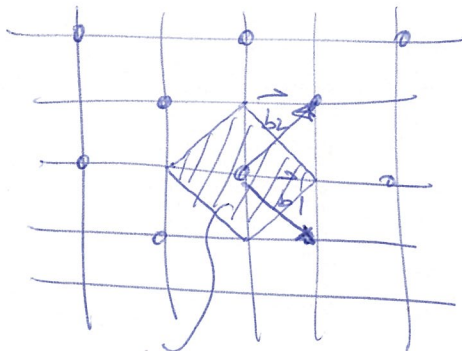
$$\vec{a}_2 = a(\hat{i} + \hat{j}) = a(1, 1)$$

b) reciproka gitter vektorer \vec{b}_i

Använd $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(1, -1) = \frac{2\pi}{a}(\hat{i} - \hat{j})$$

$$\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(1, 1) = \frac{2\pi}{a}(\hat{i} + \hat{j})$$



c) W-S cellen \cong 1st BZ

② a) fcc gitter \Rightarrow 4 atomer i basen + teubäkt gitter

$$(000), \frac{a}{2}(110), \frac{a}{2}(101), \frac{a}{2}(011)$$

$$\vec{G} = \frac{2\pi}{a}(h\hat{x} + k\hat{y} + l\hat{z})$$

$$S_G = f \left[1 + e^{i\frac{2\pi}{a}(h+k)} + e^{i\frac{2\pi}{a}(l+h)} + e^{i\frac{2\pi}{a}(k+l)} \right]$$

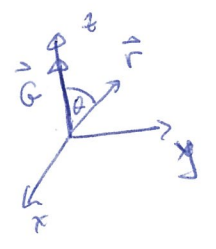
$$\Rightarrow S_{200} = 4f \Rightarrow A_{200} \propto 4f$$

$$S_{111} = 4f \Rightarrow A_{111} \propto 4f$$

b) $360 e = \int n(r) d^3 r = \int_0^\infty 4\pi r^2 \delta(r-R) \cdot A \cdot dr = 4\pi R^2 A$
 $A = \frac{360 e}{4\pi R^2}$

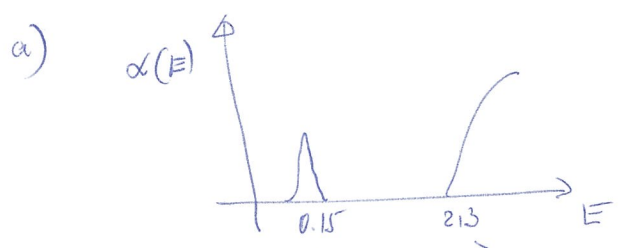
c) $f_G = \int n(r) e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^3 r = \int_0^\infty r^2 dr \frac{360 e}{4\pi R^2} \delta(r-R) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi e^{-iGr \cos\theta} \sin\theta d\theta$
 $f_G = \frac{360 e}{4\pi} \cdot 2\pi \int_{-1}^1 (-1) d\cos\theta e^{-iGR \cos\theta} = 360 e \frac{\sin GR}{GR}$

d) $G_{200} = \frac{2\pi}{a} (2, 0, 0) = \frac{4\pi}{14.11} \text{ \AA}^{-1}$
 $G_{111} = \frac{2\pi}{a} (1, 1, 1) = \frac{2\pi}{14.11} \sqrt{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}{14.11} \text{ \AA}^{-1}$



$f_{200} = 360 e \cdot \frac{\sin \frac{4\pi \cdot 3.5}{14.11}}{\frac{4\pi \cdot 3.5}{14.11}} = 360 e \cdot \underline{0.0078}$
 $f_{100} = 360 e \cdot \frac{\sin \frac{2\pi \sqrt{3}}{14.11}}{\frac{2\pi \sqrt{3}}{14.11}} = 360 e \cdot \underline{0.9}$ } $\Rightarrow \frac{f_{111}}{f_{200}} = \frac{0.9}{0.0078} \approx \underline{115}$

$\Rightarrow \frac{A_{111}}{A_{200}} \sim 11 \Rightarrow \frac{I_{111}}{I_{200}} \sim 120$



↓
 absorption
 excitation av
 optiska fotoner

↘
 excitation av elektroner
 från valens till ledningsbandet

- b) isolator (eller halvledare med bandgap på 2.3 eV)
 c) baren innehåller > 1 atom avser finns ej optiska fotoner.

Lösningar till 4 & 5:

4. För varje deluppgift kan man få maximalt 0.5p för beskrivningen av begreppet och 0.5p för exempel på ett experiment.

a) Fonon är en kvantiserad gittervibration. Jonerna i en gitter oskilleter nära potentialminima, vilket ger upphov till propagerande vågor i fasta material. Beroende på vibrationsmönstret, delas fonongrenar longitudinella och transversala fononer beroende på hur elongationsriktningen är relaterad till vågens propageringsriktning. Alla periodiska material har akustiska fononer vilkas energier (frekvenser) går mot noll för långa våglängder, och material där enhetsceller innehåller flera joner har även optiska fononer vilkas energi förblir nollskilt även i långvåglängdsgränsen. i akustiska och optiska När man kvantiserar dessa harmoniska svängningar, får man fononer. Experimentellt har fononer stor påverkan på ett antal fenomen, t.ex. termisk ledningsförmåga i isolatorer är till största delen relaterad till fononer.

b) Plasmon är en kvantiserad laddningsvåg i elektronfluiden i metaller som uppstår på grund av elektron-elektron växelverkan. Inom klassisk mekanik kan man visa att en sådan oskillation har frekvensen $\omega_p^2 = ne^2/(m \epsilon_0)$ där n är densiteten av laddningsbärare och m är deras mass. Kvantmekaniska effekter ger upphov till en dispersion så att plasmonenergin ökar med vågvektorn k . I små system, t.ex. kvantpunkter, påverkas plasmonfrekvensen även av randvillkoren vid provets yta. Experimentellt kan plasmoner studeras genom electron energy loss spectroscopy (EELS). De påverkar också många optiska egenskaper av material (t.ex. färg).

c) Magnon är en kvantiserad magnetiserings- eller spinvåg som uppstår i såväl ferromagneter som antiferromagneter. Ferromagnetiska magnoner har en kvadratisk dispersionsrelation, ω är proportionell mot k^2 , medan antiferromagnetiska magnoner har en linjär dispersion som liknar den av akustiska fononer.

Experimentellt kan magnonernas påverkan ses t.ex. i temperaturberoendet av magnetiseringen av ferromagneter vid låga temperaturer, som minskar som $AT^{(3/2)}$.

5. a) Magnetiska egenskaper av typ-2 supraledare: förväntar en definition av två kritiska fält, H_{c1} och H_{c2} , och diskussion av en komplet Meissner effekt vid $H < H_{c1}$ samt en diskussion av Abrikosov flödesgitter för $H_{c1} < H < H_{c2}$. För $H > H_{c2}$ försvinner supraledande egenskaper. En diskussion om att magnetfältet inom en typ-2 supraledare är tidsberoende bör också finnas med, och med fördel ska man påpeka de praktiska konsekvenserna av detta för tillämpningar som leviterande tåg.

b) För en SQUID, $I = I_1 [\sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin(\phi_3 - \phi_4)]$ där argumenten av sinus-funktioner är fasskillnader över tunnelövergångerna. När SQUIDens loop penetreras av ett magnetflöde Φ . blir $\phi_3 - \phi_4 = \phi_1 - \phi_2 + 2\pi \Phi/\Phi_0$ där Φ_0 är flödeskvantum $h/(2e)$. Följaktligen, om flödet varierar med $d\Phi$, ändras strömmen med $dI = 2\pi I_1 \cos(\phi_1 - \phi_2 + 2\pi \Phi/\Phi_0) d\Phi/\Phi_0$. Eftersom den maximala strömmen genom SQUID är (ungefär) $I_0 = 2I_1$, får vi att $dI/I_0 = \pi d\Phi/\Phi_0$ i det mest fördelaktiga fallet där cosinus är lika med 1. När magnetfältet är konstant och SQUID-loopens area ändras med dA , får vi att $dI/I_0 = (\pi B/\Phi_0) dA$. Om vibrationsamplituden är u , kan vi approximera extremlägen av den vibrerande SQUID-armen med triangelar, och får att $dA = Lu$. Således den minsta amplituden som kan detekteras är $u = (dI/I_0) (\Phi_0/(\pi B))/L = 1e-5 * 2e-15/(\pi * 1e-4)/1e-6 = (2/\pi) 1e-10 = 60 \text{ pm}$.

I verkligheten (S. Etaki et al., Nature Physics 4, 785, (2008)) har denna metod används för att detektera en rörelseamplitud på ca. 130 fm, eller ca 0,1% av en atoms diameter.