Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521 (gäller även för FFM520)
Torsdagen 27 augusti 2015, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, ankn. 3181, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Tentamen består av en obligatorisk del (uppg. 1-4) och en överbetygsdel (uppg. 5 och 6). Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 16 poäng på den obligatoriska delen. Om betyg 3 uppnåtts rättas även överbetygsdelen. Gränser för betyg 4 och 5 är 36 resp. 48 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

Obligatorisk del

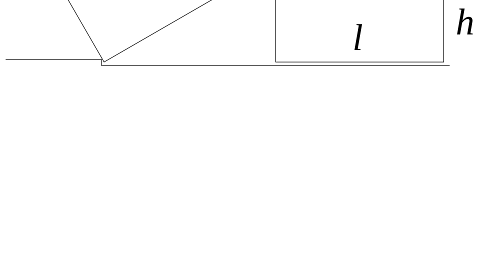
---

1. Om en massa kan glida friktionsfritt på jordytan, kommer den inte att röra sig rakt i förhållande till jorden, utan i en krökt bana. Antag att utsträckningen för partikelns bana är mycket mindre än jordradien. Banan kommer då att bli en cirkel. Hur stor är radien och periodtiden för cirkelrörelsen (beroende på hastighet och latitud)? Gör någon numerisk uppskattning.

2. En sfärisk kropp med massan 10 g och radien 8.0 mm är utsatt för en återförande kraft som är proportionell mot förflyttningen från jämviktsläget med proportionalitetskonstanten 0.50 N/m. Massan svänger i vatten, och utsätts därför för en bromsande kraft från vattnet (se nedan). Visa att den resulterande svängningsrörelsen kommer att vara svagt dämpad om amplituden är tillräckligt liten för att strömningen skall kunna betraktas som laminär. Ungefär hur stor får amplituden vara om detta skall gälla?

   Vattenmotståndet beter sig olika för laminärt och för turbulent flöde. Vilket som gäller bestäms av Reynoldstalet, $Re = \rho dv/\eta$, där ρ är vattnets densitet, d föremålets typiska diameter, v dess fart och $\eta \approx 1.5 \times 10^{-3}$ kg/(ms) vattnets viskositet. För Reynoldstal mindre än c:a 30 har man laminär strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten enligt $F \approx 6\pi\eta r v$ där r är sfärens radie. För Reynoldstal från c:a 10^3 och uppåt har man turbulent strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten i kvadrat enligt $F \approx \frac{1}{2}\rho C_d A v^2$, där A är föremålets tvärsnittsarea och C_d en formfaktor som för en sfär är ungefär 0.5.

3. Ett homogent rätblock (se figuren) glider med farten v på ett horisontellt underlag, då det stöter på en kant, så att det främre nedra hörnet stannar. Det kan antagas stanna där under den fortsatta rörelsen. Hur stor skall v minst vara för att rätblocket skall kunna tippa över (dvs. för att dess masscentrum skall passera förbi hacket)?



4. När man spelar brännboll eller baseboll är det lämpligt att minimera kraften som slagträt utövar på händerna. Detta kan åstadkommas om man väljer den punkt där bollen träffar slagträt så att impulsen från bollen ger slagträt en ren rotationsrörelse runt den "punkt" där man håller i trät. Låt slagträt ha massan m, och kalla avståndet från händerna till träffpunkten d, från händerna till masscentrum $\bar{r}$ och slagträts tröghetsmoment runt masscentrum $\bar{I}$. Hur skall d väljas uttryckt i de övriga parametrarna? Var ligger denna träffpunkt om slagträt är en smal homogen stav som man håller i ena änden?

Överbetygsdel

---

5. En liten pärla med massan m är friktionsfritt rörlig på en cirkelformad tråd med radien a. Trådens massa är M. Tråden befinner sig i ett horisontellt plan, och kan rotera fritt runt en vertikal axel som går genom en punkt på tråden. Inför lämpliga generaliserade koordinater, och skriv ned Lagrangianen och Lagranges ekvationer. Finns det någon konserverad storhet? Finns det något stabilt jämviktsläge för pärlans position på tråden? Isåfall, bestäm vinkelfrekvensen för små svängningar kring det.

6. En rymdstation har massan M och kan betraktas som en rak homogen cylinder med radien r och längden $a = \sqrt{3}r$. Den roterar runt sin symmetriaxel med vinkelhastighet ω_0. Vid en viss tidpunkt träffas den av en partikel. Under mycket kort tid påverkas rymdstationen av en impuls med beloppet p. Impulsen verkar nära stationens ena ände och är radiellt riktad (dvs. in mot symmetriaxeln, och vinkelrätt mot denna). Beskriv i detalj rymdstationens rörelse efter stöten.

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Torsdagen 27 augusti 2015
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Låt partikeln ha koordinaterna (ξ, η) i ett system som är fixt på jordytan, där $\hat{\xi}$ pekar österut och $\hat{\eta}$ norrut. Låt θ vara latituden. Den relativa hastigheten är $\vec{v}_{rel} = \dot{\xi}\hat{\xi} + \dot{\eta}\hat{\eta}$. Corioliskraften är $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}$, där $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ är jordens rotationsvektor. När man utför kryssprodukten får man
$$\hat{z} \times \hat{\xi} = \hat{\eta}\sin\theta + \hat{\zeta}\cos\theta \,,$$
$$\hat{z} \times \hat{\eta} = -\hat{\xi}\sin\theta$$
(här är $\hat{\zeta} = \hat{\xi} \times \hat{\eta}$ den lokala vertikalen). Corioliskraften blir alltså
$$\vec{F}_{cor} = -2m\Omega\sin\theta\hat{\zeta} \times \vec{v}_{rel} + (\ldots)\hat{\zeta} \,.$$
Kraften i vertikalled är oväsentlig om partikeln bara kan röra sig på ytan. Man får en kraft som ändrar riktning med inte belopp på hastigheten, och om Ω inte ändras väsentligt under rörelsen blir det en cirkel. Om cirkelns radie är r gäller $\frac{mv^2}{r} = 2m\Omega|\sin\theta|$. Radien för rörelsen är
$$r = \frac{v}{2\Omega|\sin\theta|} \,,$$
och periodtiden
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{\pi}{\Omega|\sin\theta|} \,.$$

2. Om rörelsen hade varit odämpad med amplitud A hade hastigheten som högst varit $A\omega_n$, där $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$. Reynoldstalet kan då uppskattas som
$$Re \approx \frac{\rho d A\omega_n}{\eta} \,,$$
och strömningen är laminär om
$$A < \frac{30\eta}{\rho d}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 4 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} \,.$$
När detta gäller är vattenmotståndskraften $F_b = -bv$, där $b \approx 6\pi\eta r$. Den dimensionslösa dämpningsparametern ζ ges av $\frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n$, dvs.
$$\zeta = \frac{b}{2m\omega_n} = \frac{3\pi\eta r}{\sqrt{mk}} \approx 1.6 \times 10^{-3} \ll 1 \,.$$
Svängningarna är svagt dämpade. (Dimensionskontroll bör göras.)

3. Under stöten, då rörelsen övergår från translation till rotation, är rörelsemängdsmomentet kring hörnet bevarat (kontaktkraften verkar i den punkten, och gravitationskraften har ett försumbart impulsmoment under den korta tiden). Kroppens tröghetsmoment runt hörnet är $I = \frac{1}{3}m(\ell^2 + h^2)$. Rotationshastigheten ω omedelbart efter stöten ges då av
$$mv \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{3}m(\ell^2 + h^2)\omega \,,$$

dvs. $\omega = \frac{3hv}{2(\ell^2+h^2)}$. Under den fortsatta rotationen är energin bevarad. För att kroppen skall tippa över krävs att masscentrum skall nå höjden $\frac{1}{2}\sqrt{\ell^2+h^2} - \frac{1}{2}h$. Det är möjligt om

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(\ell^2+h^2)\omega^2 \geq mg\frac{1}{2}\sqrt{\ell^2+h^2} - \frac{1}{2}h$$

Insättning av ω ovan ger

$$v^2 \geq \frac{4gh}{3}\left(1+\frac{\ell^2}{h^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{\ell^2}{h^2}}-1\right).$$

Lämpliga rimlighetskontroller: Då $\frac{\ell}{h} \gg 1$ krävs en mycket stor fart (i termer av $\sqrt{gh}$). Då $\frac{\ell}{h} \ll 1$ krävs en mycket liten fart.

4. En impuls p vinkelrätt mot slagträt i den punkt som anges i texten ger ett impulsmoment $p(d-\bar{r})$ runt masscentrum. Om inga andra krafter verkar, få masscentrums hastighet $\bar{v}$ och rotationshastigheten ω omedelbart efter stöten enligt

$$\begin{aligned} m\bar{v} &= p\,, \\ \bar{I}\omega &= p(d-\bar{r})\,. \end{aligned}$$

Eliminering av p ger $\bar{I}\omega = m\bar{v}(d-\bar{r})$. Om detta skall ge ren rotation runt ändpunkten skall det gälla att $\bar{v} = \omega\bar{r}$, och alltså $\bar{I} = m\bar{r}(d-\bar{r})$, dvs. $d = \bar{r} + \frac{\bar{I}}{m\bar{r}}$. (Detta kan också skrivas $d = \frac{I}{m\bar{r}}$, där $I = \bar{I} + m\bar{r}^2$ är trögehtsmomentet m.a.p. änden.) För en homogen stav med längden ℓ fås $d = \frac{2\ell}{3}$.

5. Låt cirkelns orientering ges av vinkeln ϕ och partikelns läge på cirkeln av ψ enligt figuren. Partikelns fart v ges av $v^2 = a^2\dot{\psi}^2 + d^2\dot{\phi}^2 + 2ad\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\frac{\psi}{2}$, där $d = 2a\cos\frac{\psi}{2}$ är partikelns avstånd till den fixa punkten. Cirkelns tröghetsmoment är $2Ma^2$.

   Lagrangianen blir

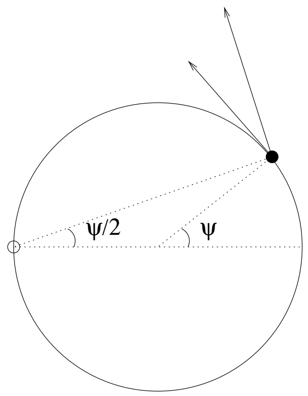
$$L = a^2\left[(M+2m\cos^2\frac{\psi}{2})\dot{\phi}^2 + 2m\cos^2\frac{\psi}{2}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{1}{2}m\dot{\psi}^2\,.\right]$$

   Lagranges ekvationer fås som vanligt, och blir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left[2(M+2m\cos^2\frac{\psi}{2})\dot{\phi} + 2m\cos^2\frac{\psi}{2}\dot{\psi}\right]\,, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + 2\cos^2\frac{\psi}{2}\dot{\phi}) + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}(2\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi})\,. \end{aligned}$$

   Den första av ekvationerna ger en bevarad storhet, som är rörelsemängdsmomentet kring den fixa axeln.

   En möjlig lösning, som bör vara stabil, är att $\phi = \nu t$, där ν är en konstant vinkelhastighet, och $\psi = 0$. Utveckla till linjär ordning kring denna lösning, dvs. $\phi = \nu t + \epsilon$, där $\epsilon \ll 1$, $\psi \ll 1$. Den första av ekvationerna ger då $\ddot{\epsilon} = -\frac{m}{M+2m}\ddot{\psi}$, och insättning i den andra ger $\ddot{\psi} + (1+\frac{2m}{M})\nu^2\psi = 0$. Vinkelhastigheten för svängningarna kring lösningen är $\omega = \nu\sqrt{1+\frac{2m}{M}}$. (Detta visar också att lösningen var stabil.) Det är rimligt att större ν ger snabbare svängningar — centrifugalkraften som vill återföra partikeln till $\psi = 0$ är då starkare.



6. Börja med att beräkna tröghetmomenten m.a.p. masscentrum. Om en axel väljs som symmetriaxeln är koordinataxlarna huvudtröghetsaxlar. M.a.p. symmetriaxeln är $I_3 = \frac{1}{2}mr^2$. Direkt beräkning av de andra ger $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ma^2 = \frac{1}{2}mr^2 = I_3 \equiv I$. Alla tre huvudtröghetsmomenten är lika, och kroppen beter sig som en sfär m.a.p. rotation. Före stöten är $\vec{L} = I\omega_0\hat{\zeta}$. Om vi låter impulsen vara riktad i ξ-led blir impulsmomentet $\frac{\sqrt{3}}{2}rp\hat{\eta}$, och rörelsemängdsmomentet efter stöten

$$\vec{L}' = I\omega_0\hat{\zeta} + \frac{\sqrt{3}}{2}rp\hat{\eta}\,.$$

Eftersom denna nya riktning också är en huvudtröghetsaxel, kommer rymdstationen att fortsätta rotera kring den, med vinkelhastigheten ω given av $(I\omega)^2 = (I\omega_0)^2 + \frac{3}{4}r^2p^2$, dvs.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3p^2}{m^2r^2}}\,.$$

Dessutom har man förstås en translationsrörelse för masscentrum med $\bar{v} = \frac{p}{m}\hat{\xi}$.