Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521 och FFM520
Tisdagen 15 april 2015, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, ankn. 3181, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Samma uppgifter och regler gäller för FFM520 och FFM521.

Tentamen består av en obligatorisk del (uppg. 1-4) och en överbetygsdel (uppg. 5 och 6). Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 16 poäng på den obligatoriska delen. Om betyg 3 uppnåtts rättas även överbetygsdelen. Gränser för betyg 4 och 5 är 36 resp. 48 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

---

## Obligatorisk del

---

1. En stel kropp med densiteten $\rho$ är formad som ett rätblock med sidorna $a$, $b$ och $c$. Bestäm kroppens huvudtröghetsaxlar, och beräkna tröghetsmatrisen i ett lämplig system. (En uträkning krävs; ev. färdiga eller memorerade formler får inte användas.)

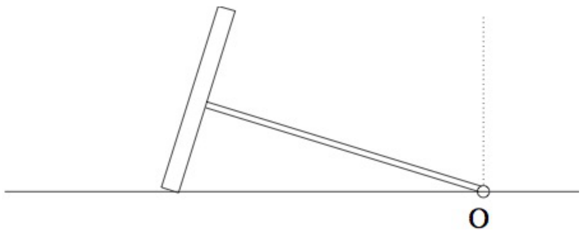
2. Ett höghastighetståg har en inbyggd automatik som lutar vagnarna i kurvorna så att ingen kraft i sidled skall upplevas. Corioliskrafter kan dock inte kompenseras på detta sätt. Antag att en passagerare har en (horisontell) hastighet relativt vagnen på högst 5 m/s, då tåget kör med farten 360 km/h genom en kurva med krökningsradie 1.0 km. Vilken lutningsvinkel har vagnen? Är Corioliseffekterna acceptabla, eller behöver man bygga om banan? Hur stora krökningsradier anser du vara acceptabla (ur denna synpunkt) för ett tänkt framtida tåg som håller en hastighet 1000 km/h?

3. En pendel består av en liten massa $m$ som sitter fast i ett lätt snöre med längden $\ell$. Snörets andra ända är fästad i en punkt i taket, som rör sig horisontellt en periodisk rörelse enligt $x(t) = a \sin \omega_0 t$. Pendeln rör sig endast i planet som spänns av $x$-axeln och vertikalen. Kalla pendelns utslagsvinkel $\theta$. Bestäm $\theta(t)$ för små svängningar om begynnelsevillkoren är $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Vad händer då $\omega_0$ sammanfaller med pendelns egenfrekvens?

4. Den ena änden av en rak homogen planka kan glida mot ett glatt golv och dess andra ände mot en glatt vägg. Plankan befinner sig hela tiden i ett vertikalplan. Om plankan startar från vila med en mycket liten vinkel mot väggen (så gott som upprätt, alltså), vad blir dess vinkelhastighet då den bildar vinkeln $\theta$ mot väggen? Vid vilken vinkel lämnar plankans övre ände väggen?

**Överbetygsdel**

5. En rotationssymmetrisk kropp är uppbyggd av en lätt axel med längden $\ell$, på vilken en tunn homogen cirkelskiva med radie $r$ och massa $m$ är fästad vinkelrätt mot axeln. Axelns ände är momentfritt fästad i en punkt $O$ på ett horisontellt plan, och cirkelskivan rullar utan glidning på planet så att precessionshastigheten runt vertikalen genom $O$ är $\Omega$. Bestäm kraften på kroppen från infästningen i punkten $O$ samt kontaktkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet (det får förutsättas att den senare saknar horisontell komponent) till storlek och riktning!




6. Ett homogent klot rullar utan glidning på ett sluttande plan (en kil). Det sluttande planet kan i sin tur glida friktionsfritt mot ett horisontellt underlag. Vi kan inskränka oss till att betrakta plan rörelse, för både klotet och kilen, i ett vertikalt plan spänt av vertikalen och linjen på kilen med brantast lutning. Inför relevanta storheter och använd Lagranges formalism för att beräkna klotets acceleration relativt det fixa underlaget, samt dess vinkelacceleration. Glöm inte att kontrollera rimligheten, t.ex. genom att titta på några extrema parameteruppsättningar.

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521 och FFM520
Onsdagen 15 april 2015, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall

1. Av symmetriskäl är huvudtröghetsaxlarna genom masscentrum parallella med rätblockets sidor. Med avseende på den axel som är parallell med sidan med längden $a$ ser kroppen ut som en rektangel med sidorna $b$ och $c$ och täthet $\rho a$. Motsvarande huvudtröghetsmoment blir

$$\int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz\, \rho a(y^2+z^2) = \frac{1}{12}\rho abc(b^2+c^2)\,.$$

De övriga fås genom permutation.

2. Lutningsvinkeln $\alpha$ fås genom $\tan\alpha = \frac{v^2/R}{g}$. I exemplet är detta ungefär 1, så lutningen blir c:a $45°$. (Det verkar som att krökningsradien redan är i minsta laget för denna hastighet.) Coriolisaccelerationen vid en relativ horisontell hastighet $u$ är $2\omega u \approx 1$ m/s$^2$, en tiondel av tyngdaccelerationen. Kanske i högsta laget.

Antag att hastigheten skalas upp med en faktor $a$ och radien med en faktor $b$. Coriolisaccelerationen skalas då som $a/b$, medan $\tan\alpha$ går som $a^2/b$. Om man accepterar högre lutningsvinklar kan man (m.a.p. Corioliseffekter) låta krökningsradien öka med samma faktor som tågets fart.

3. Man kan sätta upp pendelns rörelseekvationer antingen i ett inertialsystem, där

$$\begin{cases} x &= a\sin\omega_0 t + \ell\sin\theta\,, \\ y &= -\ell\cos\theta\,, \end{cases}$$

eller i ett system med origo i den accelerade upphängningspunkten, och då inkludera en fiktiv kraft (det senare alternativet kan bli litet effektivare). Om man väljer det förra har man

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -a\omega_0^2\sin\omega_0 t + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\,, \\ \ddot{y} &= \ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\,. \end{cases}$$

Insättning i $m\ddot{x} = -S\sin\theta$, $m\ddot{y} = S\cos\theta - mg$, och eliminering av snörkraften $S$ ger ekvationen för $\theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = \frac{a\omega_0^2}{\ell}\sin\omega_0 t\cos\theta\,,$$

som för småvinklar approximeras av

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = \frac{a\omega_0^2}{\ell}\sin\omega_0 t\,.$$

Denna differentialekvation har den allmänna lösningen

$$\theta(t) = \frac{a\omega_0^2}{\ell(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\omega_0 t + A\cos\omega t + B\sin\omega t\,,$$

där $\omega = \frac{g}{\ell}$. Notera att partikulärlösningens amplitud är större ju närmare egenfrekvensen $\omega_0$ ligger. Insättning av begynnelsevillkoren ger

$$A = 0\,,$$
$$B = -\frac{a\omega_0^3}{\ell\omega(\omega^2-\omega_0^2)}\,.$$

Lämplig rimlighetskontroll: dimension; mycket stora och mycket små $\omega_0$,... Om $\omega_0 = \omega$ fås istället en partikulärlösning $-\frac{a\omega}{2\ell} t \cos\omega t$. Den kan förstås bara använcas för små tider.

4. Låt plankans längd vara $\ell$ och dess massa $m$. Plankans mittpunkt rör sig på en cirkel med radie $\frac{\ell}{2}$ med farten $\frac{\ell}{2}\dot\theta$, där $\theta$ är vinkeln mot väggen. Dess rörelseenergi är då

$$T = \frac{1}{2}m(\frac{\ell}{2}\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot\theta^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot\theta^2 \,.$$

Dess potentiella energi (relativt den vid $\theta = 0$) är $V = \frac{1}{2}mg\ell(\cos\theta - 1)$. Energiprincipen, $T + V = 0$, ger farten vid vinkeln $\theta$,

$$\dot\theta^2 = \frac{3g}{\ell}(1 - \cos\theta) \,.$$

För att besvara den andra frågan behöver man betrakta krafter, och ta reda på när den horisontella kraften från väggen skulle behöva bli "negativ" (en dragkraft) för att rörelsen skall försiggå som antaget. Masscentrum har en centripetalacceleration med beloppet $\frac{\ell}{2}\dot\theta^2 = \frac{3g}{2}(1 - \cos\theta)$, och en tangentiell acceleration $\frac{\ell}{2}\ddot\theta = \frac{3g}{2}\sin\theta$. Den horisontella delen av accelerationen blir

$$-\frac{3g}{2}(1 - \cos\theta)\sin\theta + \frac{3g}{2}\sin\theta\cos\theta = \frac{3g}{2}\sin\theta(2\cos\theta - 1) \,.$$

Plankan tappar kontakten med väggen då $\cos\theta = \frac{1}{2}$, dvs. $\theta = 60°$.

5. Vi börjar med att bestämma rotationsvektorn. Precessionen $\Omega$ är given, vi tar den riktad uppåt i figuren. Rullvillkoret ger att den momentana rotationsaxeln går längs planet. Spinnet $\nu$ är riktat längs kroppens symmetriaxel, nedåt åt höger i figuren i tesen, och är så stor att dess vertikala komponent är $\Omega$ (nedåt). Det kan vara praktiskt att införa en vinkel $\alpha$, som är vinkeln mellan kroppens symmetriaxel och planet. Då är $\tan\alpha = r/\ell$, och man har $\nu\sin\alpha = \Omega$.

Sedan behöver man ta fram tröghetsmatrisen, för att kunna bilda rörelsemängdsmomentet. Tröghetsmomentet m.a.p. O runt symmetriaxeln är $I_\zeta = \frac{1}{2}mr^2$ och runt vinkelräta axlar $I_\perp = \frac{1}{4}mr^2 + m\ell^2$. Precessionsvektorn behöver delas upp i huvudtröghetsriktningar innan delarna multipliceras med resp. tröghetsmoment. Med $\zeta$-axeln riktad längs spinnvektorn får man då

$$L_\zeta = I_\zeta(\nu - \Omega\sin\alpha) = I_\zeta\Omega(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha) \,.$$

Den andra delen av $\Omega$ ger upphov till $L_\xi$, där $\xi$-axeln är vinkelrät mot $\zeta$-axeln och pekar snett uppåt till höger,

$$L_\xi = I_\perp\Omega\cos\alpha \,.$$

Den horisontella komponenten av $\vec{L}$ transporteras av $\Omega$. Med $\hat\eta$ ut ur pappret:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = -\hat\eta\Omega(L_\zeta\cos\alpha + L_\xi\sin\alpha) \,.$$

Detta skall åstadkommas av de vridande momenten runt O. Tyngdkraften bidrager med $mg\ell\cos\alpha\hat\eta$ och kontaktkraften $F$ i planet med $-\frac{F\ell}{\cos\alpha}\hat\eta$. Samlar vi ihop detta får vi ekvationen

$$\frac{F\ell}{\cos\alpha} - mg\ell\cos\alpha = I_\zeta\Omega^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (I_\xi - I_\zeta)\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha \,.$$

Här kan man förstås sätta in tröghetsmomenten och de trigonometriska funktionerna, men det blir inte speciellt mycket mer upplysande.

Den vertikala kraften i O skall balansera övriga, och är alltså $mg - F$. Den horisontella kraften i O skall åstadkomma masscentrums centripetalacceleration, och är $m\ell\Omega^2 \cos\alpha$.

6. Inför några relevanta storheter: Kilens massa: $M$, klotets massa: $m$, klotets radie: $r$, kilens lutningsvinkel: $\alpha$. Det finns två frihetsgrader, som kan parametriseras med $x$, en horisontell koordinat för kilen, och $\theta$, en rotationsvinkel för klotet. Välj $x$ positiv åt det håll där kilen är högre, och $\theta$ positiv då klotet rullar uppför.

   Nu kan vi skriva ned kinetiska och potentiella energier. Det enda som kräver eftertanke är klotets translationshastighet, som har en vertikal komponent $r\dot{\theta}\sin\alpha$ och en horisontell komponent $\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\alpha$. Lagrangefunktionen blir

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[(r\dot{\theta}\sin\alpha)^2 + (\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\alpha)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\theta\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mr\cos\alpha\dot{x}\dot{\theta} + \frac{7}{10}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\sin\alpha\theta\,. \end{aligned}$$

   Lagranges ekvationer är

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = (M+m)\ddot{x} + mr\cos\alpha\ddot{\theta}\,, \\ 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr\cos\alpha\ddot{x} + \frac{7}{5}mr^2\ddot{\theta} + mgr\sin\alpha\,. \end{aligned}$$

   Härur kan man lösa för $\ddot{\theta}$ och $\ddot{x}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{5g\sin\alpha}{7r}\frac{1}{1 - \frac{5}{7}\frac{m}{M+m}\cos^2\alpha}\,, \\ \ddot{x} &= \frac{5g\sin\alpha\cos\alpha}{7}\frac{m}{M+m}\frac{1}{1 - \frac{5}{7}\frac{m}{M+m}\cos^2\alpha}\,. \end{aligned}$$

   Tecknen verkar bra: klotet accelererar nedåt och trycker kilen åt sidan. Uttrycket i nämnaren kan inte bli noll. Förutom dimensionskontroll kan man kolla några extremfall. Om $\alpha = 0$ händer ingenting, som väntat. Om $M >> m$ blir $\ddot{x} = 0$, och $\ddot{\theta}$ stämmer med ett klot som rullar nedför ett plan. Om $\alpha = \frac{\pi}{2}$ fås inte fritt fall, utan rullning längs en lodrät vägg, och $\ddot{x} = 0$.