

Tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521 och FFM520

Tisdagen 26 augusti 2014, 14.00-18.00

Examinator: Martin Cederwall

Jour: Martin Wersäll, tel. 0731-840048, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15 och 17.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta.

**FFM521:** Tentamen består av sex uppgifter. För att bli godkänd krävs minst 8 poäng på uppgifterna 1-4. För dem som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-4 samt 6-7 enligt följande: 8-17 poäng ger betyg 3, 18-25 poäng ger betyg 4, 26+ poäng ger betyg 5.

**FFM520:** För studenter som skriver FFM520 gäller att de skriver samma tentamen som FFM521 med en extra uppgift (uppgift 5, 4p). För dessa studenter är kravet för godkänt 10p på uppgifterna 1-5. Betygsgränser: 10-19 (betyg 3), 20-27 (betyg 4), 28+ (betyg 5).

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

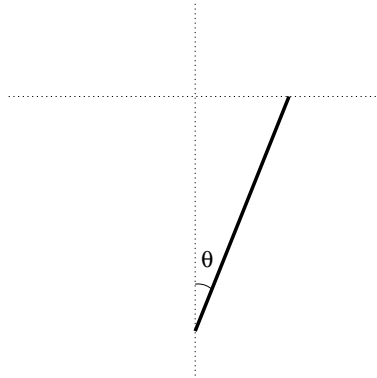
---

### Obligatorisk del

---

1. En stel kropp är sammansatt av två homogena bollar med radierna  $R$  respektive  $r$ , som tangerar varandra (dvs. avståndet mellan deras mittpunkter är  $R + r$ . Bollarna densiteter är  $K$  respektive  $k$ . Beräkna, med lämpligt val av koordinataxlar, tröghetsmatrisen med avseende på kroppens masscentrum.  
(4 poäng)
2. Ett tåg rör sig rakt österut längs ekvatorn. Åt vilket håll är Corioliskraften riktad, beräknad i ett system som följer med jordens rotation? Stämmer det med intuitionen? Argumentera. Är Corioliskraftens storlek försumbar jämfört med tyngdkraftens, för normala hastigheter? Upprepa då tåget befinner sig på ekvatorn och färdas norrut.  
(4 poäng)
3. En partikel med massan  $m$  utför endimensionell rörelse. Den utsätts för en återförande fjäderkraft med fjäderkonstant  $k$  och rör sig i ett visköst medium som ger en kraft som är motriktad hastigheten och proportionell mot farten med proportionalitetskonstant  $c$ . Dessutom påverkas partikeln av en externt pålagd kraft med harmoniskt tidsberoende och vinkelfrekvens  $\omega$ . För vilket värde på  $\omega$  blir amplituden för partikelns rörelse maximal (efter det att transienter dött ut)? (En härledning av amplitudens frekvensberoende krävs, poäng ges alltså inte för kopiering av formler.)  
(6 poäng)

4. En smal homogen stång med massa  $m$  och längd  $\ell$  har ändrar som glider längs en horisontell respektive en vertikal linje (som skär varandra). Låt  $\theta$  beteckna vinkeln från stången upp till den vertikala linjen (se figuren; det finns inget som hindrar stångens ändrar att passera genom linjernas skärningspunkt). Om stången startar i vila vid vinkeln  $\theta_0$ , vilken är dess vinkelhastighet vid vinkeln  $\theta$ ? Vilken blir vinkel-frekvensen för små svängningar kring det stabila jämviktsläget? (6 poäng)



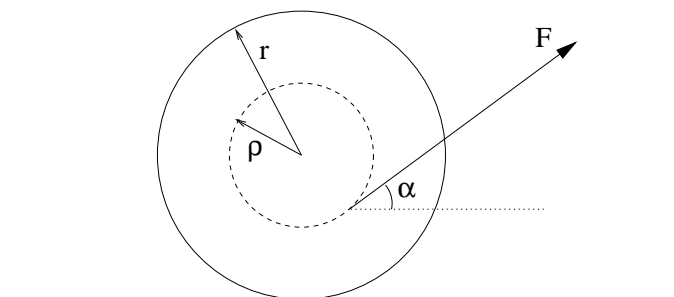
---

**Extrauppgift (enbart FFM520)**

Uppgiften utgör en del av den grundläggande delen på tentamen för studenter på kursen FFM520. Studenter på FFM521 (dvs inskrivna fr.o.m. ht 2012) skall inte göra denna uppgift.

---

5. En trådrulle består av en homogen cylinder med massan  $\mu$  och radien  $\rho$ , samt två likaså homogena "gavlar", vardera med massan  $m$  och radien  $r$ . Den vilar på ett horisontellt bord, mot vilken friktionen är tillräcklig för att förhindra glidning. Man drager i tråden med kraften  $F$  som bildar vinkeln  $\alpha$  mot horisontalen enligt figuren. Åt vilket håll börjar trådrullen rulla? Hur stor blir dess acceleration? (4 poäng)

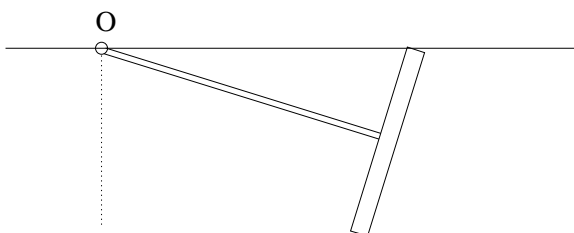


---

## Överbetygsuppgifter

---

6. En rotationssymmetrisk kropp är uppbyggd av en lätt axel med längden  $\ell$ , på vilken en tunn homogen cirkelskiva med radie  $r$  och massa  $m$  är fästad vinkelrätt mot axeln. Axelns ände är momentfritt fästad i en punkt  $O$  på ett horisontellt plan, och cirkelskivan rullar utan glidning *under* planet så att precessionshastigheten runt vertikalen genom  $O$  är  $\Omega$ . Hur stor måste precessionshastigheten vara för att rörelsen skall vara möjlig? Bestäm kraften på kroppen från infästningen i punkten  $O$  samt kontaktkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet (det får förutsättas att den senare saknar horisontell komponent) till storlek och riktning!  
(6 poäng)



7. En partikel rör sig under inverkan av tyngdkraften på den rotationssymmetriska ytan  $z = f(\varrho)$ , där  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$  är avståndet från  $z$ -axeln, och  $f$  en funktion. Använd Lagrangeformalism för att härleda systemets rörelseekvationer. Identifiera eventuella konserverade storheter. Specialisera sedan på den koniska ytan  $z = k\varrho$ .  
(6 poäng)

### Obligatorisk del

---

1. Beräkna först masscentrums läge. Kalla dess avstånd från centrum för bollen med radie  $R$  för  $\ell$ . Bollarnas respektive massor är  $M = \frac{4\pi}{3}R^3K$  respektive  $m = \frac{4\pi}{3}r^3K$ . Masscentrum befinner sig på

$$\ell = \frac{(R+r)r^3k}{R^3K+r^3k}.$$

Välj axlar genom masscentrum så att  $z$ -axeln går genom bollarnas mittpunkter. Det garanterar av symmetriskäl att tröghetsmatrisen är diagonal. Tröghetsmomentet för en homogen boll m.a.p. en axel genom masscentrum är " $\frac{2}{5}mr^2$ ", så

$$I_{zz} = \frac{8\pi}{15}(R^5K+r^5k).$$

För att beräkna de andra två huvudtröghetsmomenten (som är lika), lägger man till  $M\ell^2$  och  $m(R+r-\ell)^2$  och får

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{8\pi}{15}(R^5K+r^5k) + \frac{4\pi}{3} \frac{(R+r)^2R^3Kr^3k}{R^3K+r^3k}.$$

Dimensionskontroll.

2. Corioliskraften är  $-2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ . För något som färdas österut längs ekvatorn är den alltså riktad rakt uppåt och har beloppet  $2\omega v_{rel}$ .

Det kan ses som rimligt: att färdas österut är som att rotera med en något större vinkelhastighet än jordens, nämligen  $\omega' = \omega + \frac{v_{rel}}{R}$ . Centrifugalkraften vid denna snabbare rotation är

$$mR(\omega + \frac{v_{rel}}{R})^2 = m(R\omega^2 + 2\omega v_{rel} + \frac{v_{rel}^2}{R}).$$

Den andra termen är just denna Corioliskraft (den sista är centrifugalkraften i det roterande systemet).

Den andra termen är mycket mindre än den första om

$$\frac{v_{rel}}{R\omega} \ll 1.$$

Eftersom  $R\omega \approx \frac{40.000}{24}$  km/h lär det vara så.

Om tåget istället färdas norrut är den relativa hastigheten parallell med rotationsvektorn, och Corioliskraften är noll.

3. Enligt uppgiften kan partikelns rörelse beskrivas av differentialekvationen

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t.$$

Det är bara amplituden hos partikulärlösningen som efterfrågas. För enklare dimensionsanalys är det lämpligt att införa vinkelfrekvensen  $\omega_0$  enligt  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  och den dimensionslösa konstanten  $\gamma$  enligt  $\gamma\omega_0 = \frac{c}{m}$ . Ansätt en partikulärlösning

$$x_p(t) = B \sin \omega t + C \cos \omega t.$$

Insättning i differentialekvationen ger för sinus- och cosinustermerna:

$$\begin{aligned} -B\omega^2 - C\gamma\omega_0\omega + B\omega_0^2 &= \frac{F_0}{m}, \\ -C\omega^2 + B\gamma\omega_0\omega + C\omega_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Lösningen är

$$\begin{aligned} B &= -\frac{F_0}{m} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega_0\omega)^2}, \\ C &= -\frac{F_0}{m} \frac{\gamma\omega_0\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega_0\omega)^2}, \end{aligned}$$

och amplituden  $A$  ges av

$$A^2 = B^2 + C^2 = \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega_0\omega)^2}.$$

För att bestämma vid vilken frekvens den blir som störst söker vi minimera nämnaren. Den är ett andragradspolynom i  $\omega^2$ , med ett minimum (som bara ett relevant om det ligger på  $\omega^2 > 0$ ). Derivering ger:

$$\frac{d}{d(\omega^2)} [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega_0\omega)^2] = 2(\omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2\omega_0^2.$$

Amplituden blir maximal då

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{c^2}{2km}\right)}.$$

Detta gäller då  $\gamma < \sqrt{2}$ . Vid starkare dämpning blir amplituden större ju lägre frekvensen är.

4. Problemet kan lösas med hjälp av energi. Masscentrum rör sig på en cirkel med radien  $\frac{\ell}{2}$ , och dess fart är  $\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}$ . Den potentiella energin blir

$$V = -\frac{1}{2}mgl \cos \theta.$$

Den kinetiska energin fås genom addition av energierna för masscentrums translation och rotationen kring masscentrum:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Energikonservering ger, om staven momentant är i vila i  $\theta = \theta_0$ ,

$$\frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl \cos \theta = -\frac{1}{2}mgl \cos \theta_0,$$

så vinkelhastigheten vid vinkeln  $\theta$  ges av

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell}(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Om  $\theta \ll 1$  är  $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ , så vinkelfrekvensen för små svängningar blir

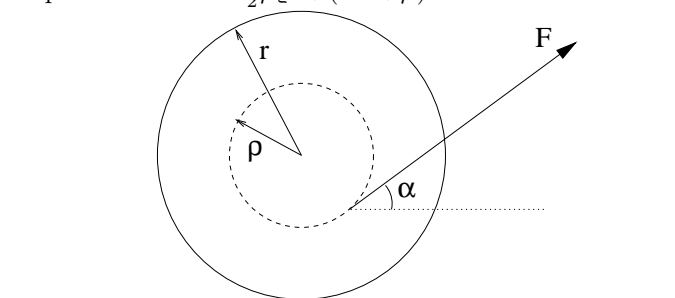
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}.$$

---

**Extrauppgift (enbart FFM520)**

---

5. Det enklaste sättet att lösa uppgiften är att betrakta rörelsen (momentant) som rotation runt kontaktpunkten med planet. Då ser man att om en tänkt förlängning av tråden skär planet till vänster om kontaktpunkten kommer trådrullen att börja rulla åt höger (så ser figuren ut att vara ritad). Om skärningspunkten däremot ligger till vänster kommer momentet att vara riktat åt andra hållet, och trådrullen rullar åt vänster. Om vi räknar det förstnämnda fallet som positiv riktning, ger litet geometri i figuren vid handen att kraftens vinkelräta hävarm kring kontaktpunkten är  $d = r \cos \alpha - \rho$ . Trådrullens tröghetsmoment runt kontaktpunkten blir  $I = \frac{1}{2}\mu\rho^2 + (2m + \mu)r^2$ . Vinkelaccelerationen ges av  $I\dot{\omega} = Fd$ .




---

**Överbetygsuppgifter**

---

6. Eftersom kroppen rullar under planet är kontaktpunkten momentant i vila, och den totala rotationsvektorn  $\vec{\omega}$  är horisontell. Därför är  $\omega = \nu \cos \alpha$ ,  $\Omega = \nu \sin \alpha$ , där  $\nu$  är spinnet,  $\Omega$  precessionen och  $\alpha$  vinkeln mellan pinnen och planet, som ges av  $\tan \alpha = \frac{r}{\ell}$ . I ett kroppsfixt system är huvudtröghetsmomentet runt symmetriaxeln  $I_{\zeta} = \frac{1}{2}mr^2$  och runt vinkelräta axlar  $I_{\perp} = \frac{1}{4}mr^2 + m\ell^2$ . För att ta reda på rörelsemängdsmomentet och dess förändring i tiden kan man gå tillväga på olika sätt. Eftersom vi har noterat att  $\vec{\omega}$  är horisontell, har storleken  $\Omega \cot \alpha$  och roterar med precessionshastigheten  $\Omega$ , kan det vara en idé att räkna ut rörelsemängdsmomentet i ett system där en  $x$ -axel är riktad rakt åt höger, liksom  $\vec{\omega}$ . Vi behöver nämligen bara veta komponenten  $I_{xx}$  av tröghetsmatrisen, då  $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$  och då  $L_x$  är den enda komponenten av rörelsemängdsmomentet som roteras av precessionen. Genom att transformera den diagonala tröghetsmatrisen med en ortogonal matris som roterar en vinkel  $\alpha$  fås  $I_{xx} = I_{\zeta} \cos^2 \alpha + I_{\perp} \sin^2 \alpha$ . Då är  $L_x = \Omega \cot \alpha (I_{\zeta} \cos^2 \alpha + I_{\perp} \sin^2 \alpha)$ , och

$$|\dot{\vec{L}}| = \Omega^2 \cot \alpha (I_{\zeta} \cos^2 \alpha + I_{\perp} \sin^2 \alpha).$$

Detta skall åstadkommas av momentet från tyngdkraften, som är  $mgl \cos \alpha$  (positivt) tillsammans med ett negativt moment från kontaktkraften i planet. Därför måste det gälla att

$$\Omega^2 \geq \frac{mgl \sin \alpha}{I_{\zeta} \cos^2 \alpha + I_{\perp} \sin^2 \alpha} = \dots = \frac{2g}{3\ell} \sqrt{1 + \frac{r^2}{\ell^2}}.$$

7. Systemet har två frihetsgrader, som kan beskrivas med  $\varrho$  och  $\varphi$ . Då partikeln rör sig på ytan är  $\dot{z} = \dot{\varphi}f'$ , Den potentiella energin är  $V = mgf$  och den kinetiska  $T = \frac{1}{2}m [(1 + f'^2)\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2]$ . Lagrangefunktionen ges av

$$L = T - V = \frac{1}{2}m [(1 + f'^2)\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2] - mgf.$$

Lagranges ekvationer för  $\varrho$  respektive  $\varphi$  fås på vanligt vis:

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + f'^2)\ddot{\varrho} + f'f''\dot{\varrho}^2 + gf', \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\varrho^2\dot{\varphi}). \end{aligned}$$

I den andra ekvationen ser vi att  $\ell = \varrho^2\dot{\varphi}$  är bevarad (rörelsemängdskonservering). Detta kan om man vill sättas in i den första ekvationen för att få en "centrifugalpotentialterm"  $-\frac{\ell^2}{\varrho^3}$ .

I specialfallet med konisk yta,  $f(\varrho) = k\varrho$ , har man  $f' = k$ ,  $f'' = 0$ , och ekvationen i  $\varrho$ -led blir

$$0 = (1 + k^2)\ddot{\varrho} - \frac{\ell^2}{\varrho^3} + kg,$$

som ser ut som rörelse med en konstant centralkraft och omskalad massa.