Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521 och 520)

Tid och plats:	Fredagen den 17 januari 2014 klockan 08.30-12.30.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta samt en egenhändigt handskriven A4 med valfritt innehåll (bägge sidor).
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter. För att bli godkänd krävs minst 8 poäng på uppgifterna 1–4 (inklusive eventuell bonuspoäng). För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1–4 samt 6–7 plus eventuell bonuspoäng enligt följande: 8–17 poäng ger betyg 3, 18–25 poäng ger betyg 4, 26+ poäng ger betyg 5.

FFM520: För studenter som skriver FFM520 gäller att de skriver samma tentamen som FFM521 med följande tillägg: Har man inte gjort inlämningsuppgiften 2012 eller 2013 skall man istället lösa en extra uppgift (uppgift 5, 4p). För dessa studenter är kravet för godkänt 10p på uppgifterna 1–5 inklusive eventuell bonuspoäng.
Betygsgränser: 10–19 (betyg 3), 20–27 (betyg 4), 28+ (betyg 5).

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

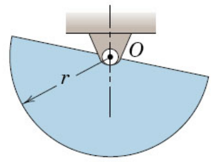
- För full (4 eller 6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag om orimligheten pekas ut; annars fullt poängavdrag.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lösningsförslag som är ofullständiga eller innehåller felaktigheter, men där en tydlig lösningsstrategi har presenterats, genererar i allmänhet det lägre av poängavdragen ovan.

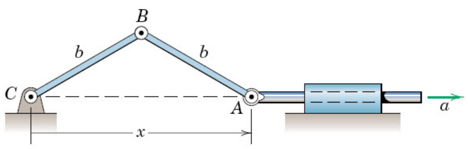
Lycka till!

Obligatorisk del

1. (a) Härled den naturliga vinkelfrekvensen för små oscillationer i vertikalplanet kring jämviktsläget runt punkten O för en halv cirkelskiva med radie r. *(2 poäng)*



   (b) Punkten A i nedan avbildade system ges en konstant acceleration a åt höger. Systemet startar från vila med $x \approx 0$. Beräkna vinkelhastigheten ω för länken AB uttryckt i x och a. *(2 poäng)*

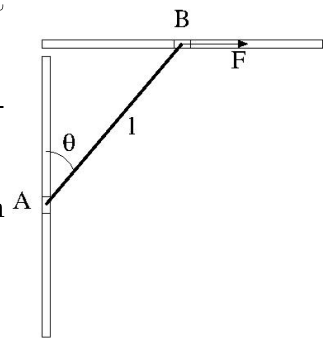


2. Beräkna tröghetsmatrisen för en homogen kon (massa m, höjd h och basradie R) i ett valfritt orienterat kartesiskt koordinatsystem. Uppgiften skall lösas explicit genom att ställa upp och utföra volymsintegraler. Enbart svar från tabellsamling ger noll poäng. *(4 poäng)*

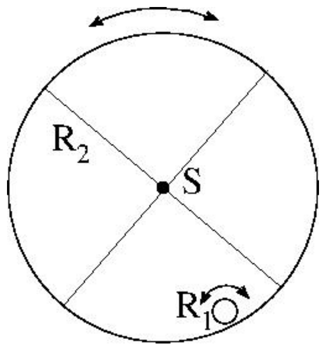
3. Betrakta en homogen stång AB med massan m och längden l som rör sig i ett vertikalplan. Stångens ändpunkter är förenade med små kolvar som glider längs glatta spår (se figur).
   Änden B påverkas av en konstant horisontell kraft F. Stången är i vila vid $t = 0$ med $\theta(t = 0) = 0$.

   (a) Bestäm vinkelaccelerationen som en funktion av rotationsvinkeln θ. *(4 poäng.)*

   (a) Bestäm vinkelhastigheten som en funktion av rotationsvinkeln θ. *(2 poäng.)*



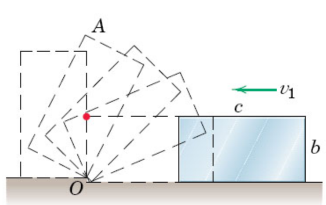
4. En ihålig cylinder med massan M_1 och radien R_1 rullar, utan glidning, på insidan av en större ihålig cylinder med massan M_2 och radien R_2. Antag att $R_1 << R_2$ och att tjocklekarna på cylinderskalen är försumbart små. Bägge cylinderaxlarna är horisontella och den större cylindern är upphängd så att den kan rotera fritt runt sin symmetriaxel S. Vad blir frekvensen för små svängningar? *(6 poäng.)*



Extrauppgift

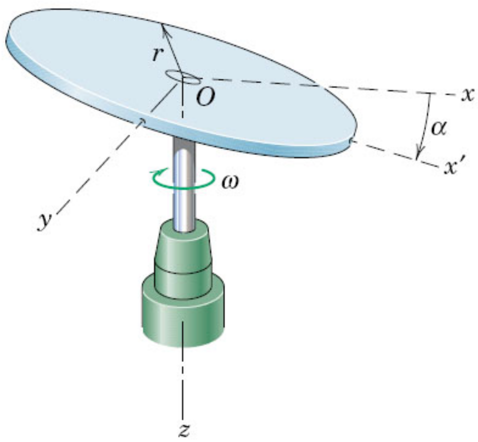
- Studenter på FFM521 (dvs inskrivna fr.o.m ht 2012) skall **inte** göra denna uppgift.
- Studenter på FFM520 som har gjort inlämningsuppgiften på stelkroppsrörelse i rummet år 2012 eller 2013 skall **inte** lösa denna uppgift. Men ange gärna på ett tentamensblad, med uppgiftens nummer, vilket år du har gjort inlämningsuppgiften.
- Studenter på FFM520 som inte har blivit godkända på uppgiften 2012 eller 2013, kan göra denna uppgift som en del av den grundläggande delen på tentamen.

5. Ett homogent, rektangulärt block med höjden b och längden a glider på en horisontell yta med farten v_1 när den träffar en liten kant vid punkten O (se figur). Antag att blocket inte studsar mot kanten utan istället börjar rotera upp till en stående position. Vad är den minsta hastighet v_1 som precis låter blocket komma upp i det stående läget? *(4 poäng.)*



Överbetygsuppgifter

6. En homogen skiva (massa m och radie r) är monterad på en vertikal axel med en vinkel α mellan skivans plan och rotationsplanet (se figur).
   (a) Ge ett uttryck för skivans rörelsemängdsmoment m.a.p. punkten O. (4p)
   (b) Beräkna vinkeln mellan den vertikala axeln och rörelsemängdsmomentsvektorn då $\alpha = 45^o$. (2p)



7. Betrakta två partiklar (med massor m_1 och m_2) som växelverkar via en central kraft (dvs en potential $V(r)$, där r är det relativa avståndet mellan partiklarna). Teckna Lagrangianen i masscentrumssystemet och visa med Lagranges ekvationer att både systemets totala energi samt rörelsemängdsmoment m.a.p. masscentrum är rörelsekonstanter. *(6 poäng.)*

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521 och 520)

Tid och plats: Fredagen den 17 januari 2014 klockan 08.30-12.30.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. Endast kortfattade lösningar redovisas. Se avsnitt 8/4, respektive 5/3 i kursboken.

   (a) För att kunna ställa upp vridmomentsekvationen behövs avståndet till halvskivans masscentrum (som blir $\bar{r} = 4r/3\pi$) samt dess tröghetsmoment runt O ($I_O = mr^2/2$). Den eftersökta naturliga vinkelfrekvensen fås genom att teckna rörelseekvationen för små vinklar. Svaret blir: $\omega_n = \sqrt{8g/3\pi r}$, som har rätt dimension.

   (b) Utnyttja det geometriska sambandet $x = 2b\cos\theta$, där θ är vinkeln mellan AC och BC. Derivera m.a.p. tid

   $$\dot{x} = -2b\dot{\theta}\sin\theta.$$

   Notera att den sökta vinkelhastigheten är $\omega = \dot{\theta}$, medan hastigheten $v = \dot{x}$. Vi får $\omega = -v/(2b\sin\theta)$. Här är det lämpligt att rita en figur för att visa på positiv riktning.

   Utnyttja sedan att a är konstant och det resulterande sambandet $\dot{x}^2 = 2ax$.

   I slututtrycket vill vi inte använda variabeln θ utan enbart x som givet i uppgiftsformuleringen. Vi utnyttjar därför att $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-x^2/4b^2}$. Svaret blir

   $$\omega = \sqrt{\frac{2ax}{4b^2 - x^2}},$$

   med rätt dimension.

2. Vi väljer att teckna tröghetsmatrisen i ett kartesiskt koordinatsystem med origo i mitten av basen, och z-axeln längs symmetriaxeln (dvs $0 \leq z \leq h$). Eftersom konen är homogen blir densiteten

   $$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h/3}.$$

Vi kan skriva masselementet $dm = \rho(x,y,z)dxdydz$ och får tröghetsmatrisen ur följande volymsintegral(er)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_V \rho(x,y,z) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} dxdydz \\
&= \rho \int_{z=0}^{h} \int_{y=-R(h-z)/h}^{R(h-z)/h} \int_{x=-\sqrt{(R(h-z)/h)^2-y^2}}^{\sqrt{(R(h-z)/h)^2-y^2}} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} dxdydz \\
&= \begin{pmatrix} \frac{mh^2}{10} + \frac{3mR^2}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mh^2}{10} + \frac{3mR^2}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mR^2}{10} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Vi kan notera att tröghetsmatrisen är diagonal och att dessa koordinataxlar alltså är huvudtröghetsaxlar. Deviationsmomentet kan visas vara lika med noll genom symmetriargument. Notera symmetrin i både x och y koordinaterna. Det är också uppenbart att tröghetsmomenten måste vara lika runt x- och y-axlarna. Detta lämnar enbart två matriselement att räkna ut explicit: $I_{xx} = I_{yy}$ och I_{zz}. Se integral och svar ovan.

3. Lösningsstrategi:

   (a) Börja med kinematiken och teckna ett uttryck för stångens masscentrums acceleration uttryckt i vinkeln θ, vinkelhastigheten $\omega = \dot{\theta}$ samt vinkelacceleration $\ddot{\theta}$.

   (b) Teckna sedan vridmomentekvationen. Väljer man att göra detta m.a.p. masscentrum måste man även teckna kraftekvationer för att få de okända normalkrafterna i A och B. Enklare blir det om man väljer någon av punkterna som genomkorsas av dessa krafters verkningslinjer.

   (c) Vinkelaccelerationen blir $\ddot{\theta} = \frac{3F}{ml}\cos\theta - \frac{3g}{2l}\sin\theta$.

   (d) Vinkelhastigheten fås genom att integrera detta uttryck. Använd sambandet $\ddot{\theta} = \omega d\omega/d\theta$, samt ett begynnelsevillkor. Detta ger $\dot{\theta}^2 = \frac{6F}{ml}\sin\theta + \frac{3g}{l}(\cos\theta - 1)$.

4. Lösningsstrategi:

   (a) Teckna rörelseekvationer för det två cylindrarna. Vi kommer att ha två rörelsevariabler (två rotationsvinklar) samt en okänd friktionskraft. Följdaktligen behövs tre ekvationer.

(b) Den mindre cylinderns position relativt vertikalaxeln kan beskrivas med en tredje vinkel θ. Då vi har rullning utan glidning borde denna vinkel bero på cylindrarnas rotationsvinklar.

(c) Utnyttja $\sin\theta \approx \theta$ för små vinklar för att lösa röresleekvationen för θ.

Tröghetsmomenten för de två cylindrarna är $I_i = M_i R_i^2, \quad i = 1, 2.$Vi inför den okända friktionskraften F som verkar i kontaktpunkten mellan de två cylindrarna. Vinklarna θ_1 och θ_2 beskriver de två cylindrarnas rotation (moturs positivt) med $\theta_1 = \theta_2 = 0$ då den mindre cylindern befinner sig längst ner i den större cylindern. Vridmomentsekvationerna blir

$$FR_1 = M_1 R_1^2 \ddot{\theta}_1, \tag{1}$$

$$-FR_2 = M_2 R_2^2 \ddot{\theta}_2. \tag{2}$$

Vi introducerar också vinkeln θ som beskriver den mindre cylinderns position relativt vertikalaxeln (en figur vore bra). Vi kan då teckna kraftekvationen för den mindre cylindern

$$F - M_1 g \sin\theta = M_1 R_2 \ddot{\theta} \tag{3}$$

Utan glidning, och med $R_1 \ll R_2$, fås villkoret

$$R_2\theta \approx R_2\theta_2 - R_1\theta_1. \tag{4}$$

Med våra tre rörelseekvationer och ett geometrisk samband kan vi teckna en rörelseekvation för θ med enbart kända storheter. Vi utnyttjar också att $\sin\theta \approx \theta$

$$\left(M_1 + \frac{1}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}} \right) \ddot{\theta} + \frac{M_1 g}{R_2}\theta = 0.$$

Den sökta frekvensen blir därför

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_2}} \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1 + 2M_2}}.$$

Notera t.ex. specialfallet då $M_2 \ll M_1$: Friktionskraften blir försumbar och vi har bara en normalkraft. Den mindre cylindern beter sig som en pendel med längden R_2 och frekvensen blir mycket riktigt $\sqrt{g/R_2}$.

Extrauppgift

5. Lösningsstrategi:

   (a) Vi inser att rörelsemängdsmomentet L_O runt punkten O kommer att konserveras genom stöten. Sedan kommer denna att minska pga vridmomentet från tyngdkraften. Då kan vi använda arbete-energi-principen för att finna den eftersökta minsta farten.

   (b) Före stöten ges L_O av masscentrums hastighet v_1 samt momentarmen $b/2$: $L_O = mv_1 b/2$.

   (c) Efter stöten har blocket rotationshastigheten $\bar{v}/\bar{r}$, där $\bar{v}$ är masscentrums hastighet direkt efter stöten (tangentiellt mot rotationen) och $\bar{r} = (b^2/4 + c^2/4)$. Notera att vi kan försumma studsen. Detta ger $L_O = \frac{m}{3}\left(b^2 + c^2\right)\omega$, där vi använt Steiners sats för att räkna ut tröghetsmomentet I_O.

   (d) Rotationshastigheten $\omega = \frac{3v_1 b}{2(b^2+c^2)}$ räcker för att lyfta blocket om rotationsenergin precis matchar ökningen i potentiell energi. Ställer vi upp uttrycken för dessa två energier får vi slutligen villkoret

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{g}{3}\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\sqrt{b^2 + c^2} - b\right)}$$

Överbetygsuppgifter

6. Enbart svar:

   (a) $\vec{L}_O = \frac{mr^2}{4}\omega\left[-\sin\alpha\cos\alpha\hat{x} + (\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)\hat{z}\right]$

   (b) $\beta = \arccos\left(\vec{L}_O \cdot \hat{z}/L_O\right)$ vilket ger $\beta = \arccos(3/\sqrt{10}) \approx 18^\circ$ för $\alpha = 45^\circ$.

7. Med en kraft som alltid är riktad längs med separationsvektorn mellan de två partiklarna kommer dessa att röra sig ett plan. Med polära koordinater i detta plan gäller följande för masscentrumssystemet

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0,$$

dvs $m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2$ eller $m_1 r_1 = m_2 r_2$ för storlekarna. Den kinetiska energin blir

$$T = \frac{m_1}{2}|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \ldots = \frac{m_2^2}{2\mu}|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \frac{m_2^2}{2\mu}\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2\right),$$

där $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ är den reducerade massan. Den potentiella energin beror på avståndet $r = r_1 + r_2 = m_2 r_2/\mu$. Med θ och r_2 som generella koordinater får vi Lagrangianen

$$L = T - V = \frac{m_2^2}{2\mu}\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2\right) - V\left(m_2 r_2/\mu\right). \tag{5}$$

Konserverade storheter ges av rörelsekonstanter. Då Lagrangianen saknar $\dot{\theta}$-beroende ger den ena av Lagranges ekvationer direkt att

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_2^2 r_2^2 \dot{\theta}}{\mu} = \text{konstant} \equiv J.$$

Nu gäller det bara att identifiera J. Systemets totala rörelsemängdsmoment runt masscentrum är $m_2 r_2^2\dot{\theta} + m_1 r_1^2\dot{\theta} = m_2^2 r_2^2\dot{\theta}/\mu = J$. Alltså är rörelsemängdsmomentet konserverat.

För att finna en annan rörelsekonstant tecknar vi

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j\right] = \frac{d}{dt}\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j,$$

där vi har utnyttjat Lagranges ekvationer samt att L ej beror på t explicit. Rörelsekonstanten blir därmed

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \text{konstant}$$

I vårt fall finner vi att summan i vänsterledet blir

$$\frac{m_2^2\dot{r}_2^2}{\mu} + \frac{m_2^2 r_2^2\dot{\theta}_2^2}{\mu} = 2T,$$

dvs med $L = T - V$ ser vi att vår rörelsekonstant är $T + V = E =$ konstant.