Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats:	Lördagen den 1 september 2012 klockan 08.30-12.30 i M.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Per Salomonson, 031–772 3231.

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter. För att bli godkänd krävs minst 10 poäng på uppgifterna 1-4 (inklusive eventuella bonuspoäng). För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-6 plus eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna enligt följande gränser:
10-18 poäng ger betyg 3, 19-26 poäng ger betyg 4, 27+ poäng ger betyg 5.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (4 eller 6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag om orimligheten pekas ut; annars fullt poängavdrag.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lösningsförslag som är ofullständiga eller innehåller felaktigheter, men där en tydlig lösningsstrategi har presenterats, genererar i allmänhet det lägre av poängavdragen ovan.

Lycka till!

Obligatorisk del

1. Härled följande:

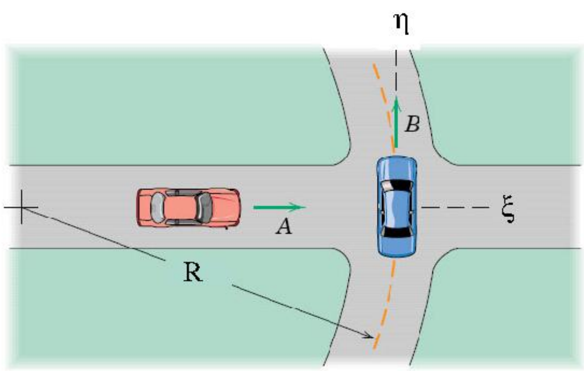
   (a) Beräkna tröghetsmomentet med avseende på en axel genom mittpunkten O för en tunn skiva med radie R. Skivan har areadensiteten $\rho(r) = \rho_0 \frac{a+r}{a+R}$, där r är avståndet från mittpunkten och a är en konstant med enheten längd. (2p)

   (b) Beräkna tröghetsmatrisen (i valfritt koordinatsystem) för ett kubiskt skal med avseende på mittpunkten. Sidlängden är a och kubens totala massa är M. Skalet kan betraktas som infinitesimalt tunt.

   Ledning: Man får utnyttja kända uttryck för tröghetsmoment med avseende på axlar genom masscentrum för en kvadratisk platta med sidlängd a och massa m: $\bar{I}_x = ma^2/12, \quad \bar{I}_z = ma^2/6$, där x-axeln är parallel med kvadratens sida och z-axeln är vinkelrät mot kvadratens plan. (2p)

2. Bilen B rundar en kurva (krökningsradie R) genom en korsning med konstant fart v_B. Samtidigt närmar sig bil A korsningen med konstant hastighet $\vec{v}_A$ (riktning enligt figur). Avståndet mellan bilarna i det givna läget är L.

   Ange hastighet och acceleration för bil A sedd från en observatör som åker med bil B. Använd koordinatsystemet $\xi\eta$ som är kroppsfixa i bil B. (4p)



3. En homogen, tunn stav med massa M vilar på två snabbt roterande hjul, vars axlar är separerade ett avstånd a (se figur). Staven släpps från vila med centrum något förskjutet från mitten. Det horisontella avståndet från hjul 1 till stavens mittpunkt är x_0 i detta begynnelseläge, och $x_0 \neq a/2$.

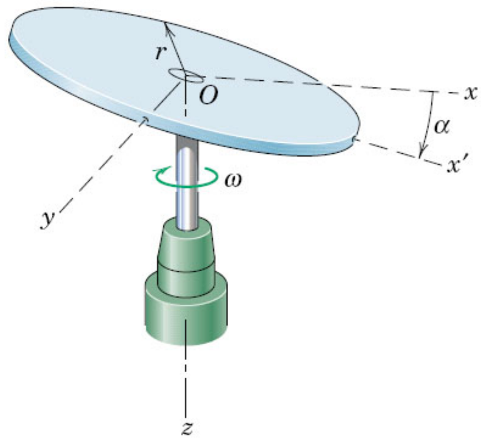
   (a) Hjulen snurrar i motsatta riktningar (se vänster figurpanel) och den kinetiska friktionskoefficienten mellan hjul och stav är μ. Teckna en rörelseekvation för staven med rörelsevariablen $x(t)$, avståndet från hjul 1 till centrum på staven. Lös denna rörelseekvation. (4p)

   (b) Antag nu att rotationsrktningarna på de två hjulen är omvända (se höger figurpanel). Teckna och lös rörelseekvationen med samma begynnelsevillkor som i uppgift (a). (2p)

4. En boll med radie r rullar ner för ytan på en fix sfär med radie R, där $R \gg r$. Friktionen mellan boll och sfär gör att bollen rullar utan att glida. Bollen har ett tröghetsmoment $I = \beta m r^2$ med avseende på en axel genom dess mittpunkt. Vid vilken punkt kommer bollen att lämna ytan (bollens rörelse startar från stillastående från toppen av sfären)? (6p)

Överbetygsuppgifter

5. En homogen skiva (massa m och radie r) är monterad på en vertikal axel med en vinkel α mellan skivans plan och rotationsplanet (se figur).
   (a) Ge ett uttryck för skivans rörelsemängdsmoment m.a.p. punkten O. (4p)
   (b) Beräkna vinkeln mellan den vertikala axeln och rörelsemängdsmomentsvektorn då $\alpha = 45^o$. (2p)



6. Betrakta storheten
$$E \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L,$$
där $L = L(q, \dot{q}, t)$ är Lagrangianen för ett system med N frihetsgrader och q_i, $\dot{q}_i$ är generaliserade koordinater och hastigheter.
   (a) Ovanstående storhet motsvarar (i de flesta fall) ett systems totala mekaniska energi. Visa explicit att detta påstående är sant för en partikel i rummet som beskrivs med cartesiska koordinater xyz och en allmän potentiell energi $V(x, y, z)$. (2p)
   (b) Visa nu att Lagranges ekvationer ger att E (enligt definitionen ovan) är en konserverad storhet om Lagrangianen ej har något explicit tidsberoende (dvs $\partial L/\partial t = 0$). (4p)

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Lördagen den 1 september 2012 klockan 08.30-12.30 i M.

Lösningsskiss: Christian Forssén

Denna lösningsskiss innehåller inga kompletta lösningar utan enbart svar, ledtrådar, och möjliga lösningsstrategier.

Obligatorisk del

---

1. (a) $I_O = 2\pi R^2 \frac{\rho_0}{1+a/R}\left[\frac{1}{4}\frac{a}{R} + \frac{1}{5}\right] R^2$.
   Notera att gränsvärdet då $R \ll a$ går mot det kända tröghetsmomentet för en homogen skiva: $I_O = (2\pi R^2 \rho_0)\frac{R^2}{4}$.

   (b) Välj förslagsvis ett kartesiskt koordinatsystem i vilket koordinataxlarna passerar vinkelrät genom kubens sidor. Använd symmetriargument för att visa att tröghetsmatrisen blir diagonal med identiska huvudtröghetsmoment. Med hjälp av Steiners sats räknar man ut att

$$\mathbf{I}_O = Ma^2 \frac{5}{18}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Den sökta relativa hastigheten och accelerationen blir

$$\vec{v}_{\text{rel}} = v_A \hat{\xi} - v_B \left(1 - \frac{L}{R}\right)\hat{\eta}$$
$$\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{v_B^2}{R}\left[\left(1 - \frac{L}{R}\right)\hat{\xi} + \frac{2v_A}{v_B}\hat{\eta}\right]$$

3. (a) Rörelseekvationen blir

$$M\ddot{x} = \frac{\mu M g}{a}(a - 2x).$$

   Med omdefinitionen $\xi = 2x - a$ blir detta $\ddot{\xi} + \frac{2\mu g}{a}\xi = 0$.

   Lösningen för givna begynnelsevillkor blir

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cos(\omega t) + \frac{a}{2}, \quad \text{med } \omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{a}}.$$

(b) Med omvända rotationsriktningar kommer de två termerna i rörelse-ekvationen ovan att få motsatt tecken. Detta betyder att rörelsen inte längre kommer att vara oscillerande

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\cosh(\omega t) + \frac{a}{2}.$$

4. **Lösningsstrategi**

   (a) Teckna rörelseekvationen i normalled.

   (b) Bollens fart och rotationshastighet är relaterade eftersom bollen rullar mot ytan. Använd därför energikonservering för att finna ett uttryck för bollens fart.

   (c) Sök läget då normalkraften blir noll.

   Svar: $\cos\theta = \frac{2}{3+\beta}$.

Överbetygsuppgifter

---

5. **Lösningsstrategi**

   (a) Teckna skivans rotationsvektor samt tröghetsmatris i ett kropps-fixt koordinatsystem

   (b) Teckna ett samband mellan dessa kroppsfixa axlar och det rums-fixa koordinatsystemet xyz.

   (c) Den sökta vinkeln fås genom skalärprodukten $\cos\beta = \frac{\vec{L}_O}{L_O}\cdot\hat{z}$.

   (a) Rörelsemängdsmomenten uttryckt i det kroppsfixa koordinatsystemet

$$\vec{L}_O = \frac{1}{4}mr^2\omega\left[(-\sin\alpha\cos\alpha)\hat{x} + (\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)\hat{z}\right]$$

   (b) Vinkeln $\beta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18^o$.

6. Se tentamen 2009-05-26