Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats:	Lördagen den 7 januari 2012 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Lexikon, typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén, 031–772 3261.

Betygsgränser: Tentamen består av fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng (om ej annat anges). För att bli godkänd krävs minst 12 poäng på uppgifterna 1-3 (inklusive eventuella bonuspoäng från de två inlämningsuppgifterna).
För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-5 plus eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna enligt följande gränser:
12-23 poäng ger betyg 3, 24-29 poäng ger betyg 4, 30+ poäng ger betyg 5.

För registrerade studenter från tidigare årskurser finns möjligheten att göra en extra tentamensuppgift (6 poäng) på kursdel A som ersättning för inlämningsuppgifterna.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras , införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag, om orimligheten pekas ut; annars 5-6 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 5-6 poängs avdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lycka till!

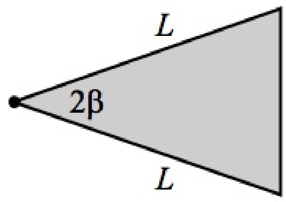
Obligatorisk del

1. *(6 poäng. 2 poäng per deluppgift. Kortfattade lösningar skall redovisas.)*

   (a) En odämpad oscillator har periodtiden $\tau_0 = 1$ s. Med en svag dämpning uppmäter man att amplituden sjunker med 50% på en svängningsperiod τ_1. Hur stor är dämpningsfaktorn ζ och hur stor är periodtiden τ_1?

   (b) Ett höghastighetståg rör sig med farten 150 m/s på ett rakt, horisontellt spår tvärs över sydpolen. Finn vinkeln mellan en lodlina som hänger från taket inne i tåget och en som hänger från taket i en hydda utanför tåget. Rita en tydlig figur där även vinkelns riktning framgår.

   (c) Härled tröghetsmomentet map en axel genom toppen på en tunn, liksidig triangel med massa m, sidlängd L och baslängd a. Antag att baslängden är mycket liten $a/L \ll 1$.

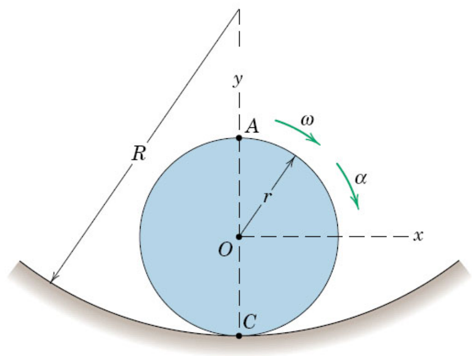


2. En boll rör sig på ett strävt, horisontellt bord. Inledningsvis rör sig bollen med farten v_0 utan att rulla. Bollen har tröghetsmomentet $I = \beta m R^2$ runt en axel genom masscentrum där R är dess radie och m dess massa. Efter ett tag kommer bollen att börja rulla och så småningom rullar den utan att glida.

   (a) Teckna vridmomentet på bollen och dess rörelsemängdsmoment relativt den momentana kontaktpunkten med marken. Finn genom rörelseekvationen $M = dL/dt$ ett samband mellan masscentrums acceleration a och bollens vinkelacceleration α.

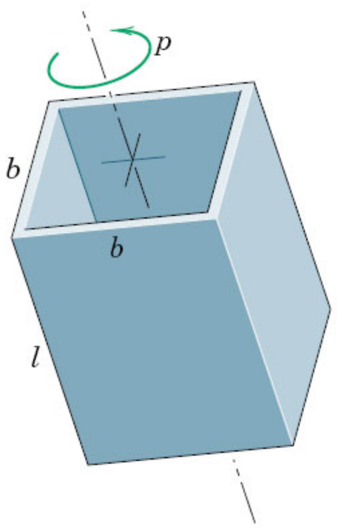
   (b) Finn genom ovanstående samband den hastighet v_f som bollen har då den slutar glida.

3. Hjulet i figuren rullar (utan glidning) på den cirkulära ytan. I bottenpositionen har hjulet en vinkelhastighet ω och en vinkelacceleration α, båda medurs. I detta läge, finn uttryck för accelerationen för punkt C (kontaktpunkten med underlaget) samt för punkt A. Punkterna A och C är fixerade i hjulet och befinner sig momentant som figuren visar. Ge svaren i det givna kartesiska koordinatsystemet $x - y$.

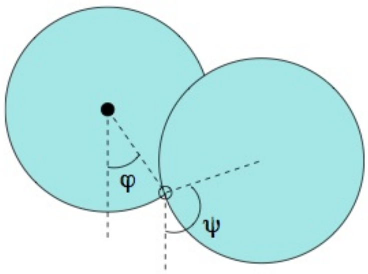


Överbetygsuppgifter

4. Den rektangulära lådan med öppna ändar spinner runt sin symmetriaxel enligt figur. Trots att inget externt vridmoment påverkar kroppen kan den ändå ha en precessionsrörelse, sk fri precession. För vilka värden på l/b kommer precessionen att vara retrograd, dvs precessionsrörelsen vara motriktad spinnrörelsen?



5. En dubbelpendel består av två identiska homogena skivor som sitter ihop vid ytterkanterna via en friktionsfri led. Den ena skivan är upphängd i mittpunkten via en friktionfri led och hela arrangemanget kan enbart röra sig i vertikalplanet. Teckna Lagrangianen. Finn och lös rörelseekvationerna för små svängingar.



Extrauppgift (del A)

6. Åkattraktionen Uppswinget på Liseberg är en gunga som kan beskrivas som en sammansatt stel kropp bestående av en stav med längden R och massan m samt en punktmassa M längst ut. Enligt Lisebergs hemsida är längden på gungan 20 m och maxvinkeln relativt lodlinjen är $\theta_{\max} = 120^o$.

   Teckna ett uttryck för en passagerares acceleration i negativ z-led (dvs mot marken) som en funktion av vinkeln θ relativt lodlinjen och kvoten $x \equiv m/M$. Visa att denna acceleration är större än tyngdaccelerationen g under en del av färden.

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Lördagen den 7 januari 2012 klockan 08.30-12.30 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. (a) $\zeta = \frac{\ln 2}{\sqrt{(\ln 2)^2 + 4\pi^2}} = 0.11$
   $\tau_1 = 1.006$ s

   (b) $\theta = 0.13^o$ åt vänster i färdriktningen.

   (c) $I = \frac{mL^2}{2}$ (enklast är att summera över smala ytelement med baslängd xa/L där $x \in [0, L]$.)

2. (enbart svar och ledtråd)

   (a) $M_P = 0$ samt $L_P = I\omega + mRv$ (notera att vi ej har rotation kring en fix axel)
   Rörelseekvationen ger sambandet $a = -\beta R\alpha$.

   (b) $v_f = \frac{v_0}{1+\beta}$ (finner man genom att integrera (a) från $t = 0$ till $t = T$ då bollen slutat glida).

3. (enbart svar och ledtråd)

   - Teckna accelerationen för mittpunkten O. Använd förslagsvis n, t-koordinater:
   $$(\vec{a}_O)_t = r\alpha; \qquad (\vec{a}_O)_n = \frac{r^2\omega^2}{R - r}$$
   - Använd sedan uttrycken för relativ rörelse: $\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{C/O}$ samt motsvarande för $\vec{a}_A$.
   - Den relativa rörelsen är en ren rotation.
   - Alla normal- och tangentialriktningar kan sedan relateras momentant till det givna koordinatsystemet x, y.

$$\vec{a}_C = \frac{r\omega^2}{1 - r/R}\hat{y},$$
$$\vec{a}_A = 2r\alpha\hat{x} + r\omega^2 \frac{2r/R - 1}{1 - r/R}\hat{y}.$$

Överbetygsuppgifter

---

4. (kortfattat)

   - I ett kroppsfixt koordinatsystem ($\xi\eta\zeta$, med ζ i huvudsymmetriaxlens riktning) blir tröghetsmatrisen diagonal, Med totala massan $M = 4m$ fås
     $$I_0 \equiv I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = \frac{m}{3}\left(2b^2 + L^2\right); \qquad I_\zeta \equiv I_{\zeta\zeta} = \frac{4}{3}mb^2.$$
   - Fri precession ger
     $$\Omega = \frac{I_\zeta p}{(I_0 - I_\zeta)\cos\theta},$$
     där p är spinnet, Ω presecessionshastigheten och θ är den fixa vinkeln mellan dessa vektorer.
   - Retrograd precession fås därför då $I_\zeta > I_0$.

   Svar: $(L/b) < \sqrt{2}$.

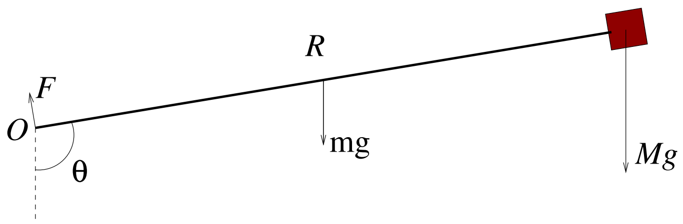
5. (kortfattat)

   $V = MgR(\cos\varphi + \cos\psi)$
   $T = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}MR^2\left[\frac{3}{4}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}\dot{psi}\cos 9\varphi + \psi)\right] - MgR(\cos\varphi + \cos\psi - 2)$, där den sista termen kommer från masscentrums translationsrörelse för den nedre pendeln.

   Lagrangianen $L = T - V$ samt Lagranges ekvationer förenklade till små vinklar ger
   $$\frac{3}{2}\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} + \frac{g}{a}\varphi = 0,$$
   $$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\ddot{\psi} + \frac{g}{a}\psi = 0.$$
   Vilket ger två lösningar $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{5}$.

Extrauppgift (del A)

6. Man får tänka sig att gungan först ges fart under en startfas. Därefter svänger den fritt kring sin upphängningspunkt O, och det är denna svängningsrörelse vi skall studera.



I O kan den då påverkas av lagerkraft F, men inte av något kraftmoment. Därför ställer vi upp rörelsemängdsmomentekvationen för gungan med avseende på upphängningspunkten O. Tröghetsmomentet x vinkelaccelerationen = summan av kraftmomenten:

$$(mR^2/3 + MR^2)\ddot{\theta} = -(mgR/2 + MgR)\sin\theta.$$

För att uttrycka passagerarnas (dvs M's) acceleration behöver vi också vinkelhastigheten. Den kan vi få tex genom att multiplicera ekvationen ovan med $\dot{\theta}$ och integrera med avseende på tiden från tidpunkten för maximalt utslag:

$$\ddot{\theta} = -\frac{m/2 + M}{m/3 + M}\frac{g}{R}\sin\theta, \qquad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{m/2 + M}{m/3 + M}\frac{g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Passagerarnas accelerationen i negativ z-led kan beräknas tex genom att teckna ett uttryck för M's z-koordinat och derivera det två gånger.

$$\begin{aligned}
-z &= R\cos\theta \\
-\dot{z} &= -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\
-\ddot{z} &= -R(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2) = -\frac{m/2 + M}{m/3 + M}g(-\sin^2\theta + 2(\cos\theta - \cos\theta_0)\cos\theta).
\end{aligned}$$

Detta är det efterfrågade uttrycket. Att accelerationen nedåt stundtals är större än g kan man tex se genom att räkna ut den för utslagsvinkeln $90°$. Då är den

$$-\ddot{z}(\pi/2) = \frac{m/2 + M}{m/3 + M}g > g.$$