Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Tisdagen 23 maj 2006, 08.30-12.30, M-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Ann-Marie Pendrill, tel. 7723282

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

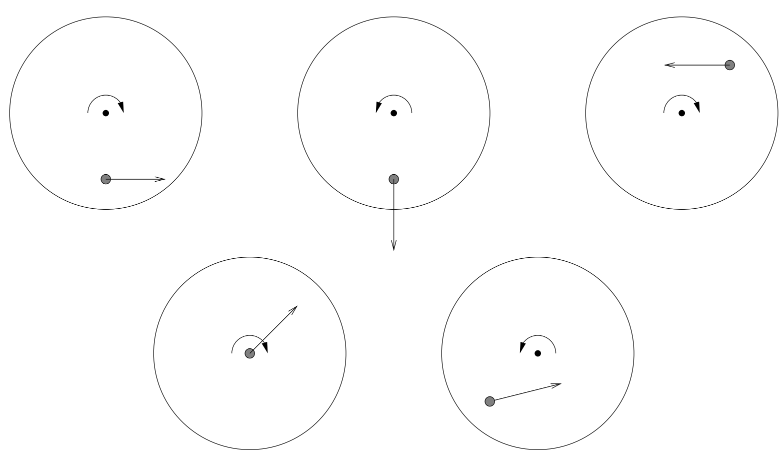
Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

---

1. a. En partikel kan röra sig på en roterande skiva. I figurerna nedan är skivans rotationsriktning samt partikelns läge och rörelseriktning (relativt skivan) inritade. Ange (rita) i varje figur riktningen för den centrifugalkraft och corioliskraft som uppträder som fiktiva krafter i ett system som roterar med skivan!



(Endast svar, 1 poäng per korrekt figur.)

b. En kropp med massan 10 kg är i rörelse relativt jorden med farten $|\vec{v}_{rel}| = 1000$ m/s . Ange storlek och riktning för corioliskraften i de olika fallen!

i) Kroppen befinner sig vid sydpolen och rör sig (norrut) längs jordytan.
ii) Kroppen befinner sig vid ekvatorn och rör sig norrut längs jordytan.
iii) Kroppen befinner sig vid ekvatorn och rör sig österut längs jordytan.
iv) Kroppen befinner sig vid ekvatorn och rör sig rakt uppåt.
v) Kroppen befinner sig vid 60° nordlig bredd och rör sig österut längs jordytan.
vi) Kroppen befinner sig vid 60° nordlig bredd och rör sig rakt nedåt.
vii) Kroppen befinner sig vid 45° nordlig bredd och rör sig norrut och uppåt så att dess bana har vinkeln 45° mot marken.

(Endast svar, 1 poäng per korrekt besvarad deluppgift)

2. En pendel i form av en liten kula med massan 500 g fäst i ett snöre med längden 60 cm hänger från taket i en bil som accelerar med $a = 2.0\,\mathrm{m/s}^2$ på en rak väg. Beräkna periodtiden för små svängningar kring pendelns jämviktsläge, och jämför med periodtiden då bilen kör med konstant hastighet!
(14 poäng)

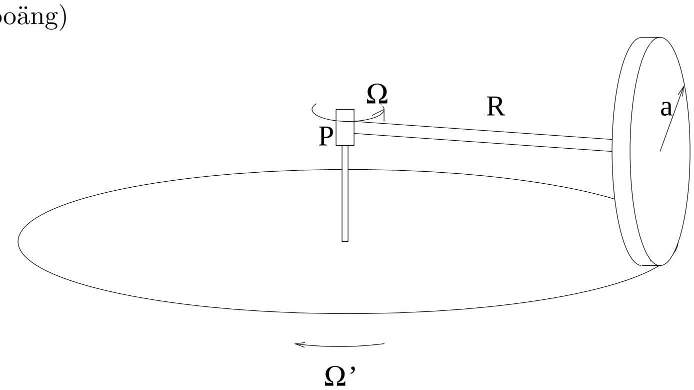
3. Ett homogent klot släpps från vila och rör sig därefter nedför ett sluttande plan med lutningsvinkel α. Friktionskoefficienten mellan klotet och planet är μ. För vilka värden på μ rullar respektive glider klotet? Bestäm dess acceleration då μ är tillräckligt stor för att det skall rulla, samt dess acceleration och vinkelacceleration då μ är för liten för att förhindra glidning!
(14 poäng)

Uppgifter för överbetyg

---

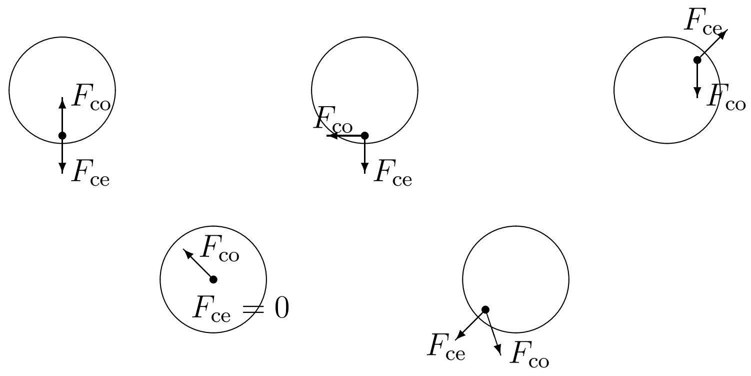
4. En projektil skjuts upp från jordytan med begynnelsefarten v_0 (understigande flykthastigheten) och stigningsvinkeln $\alpha < 90°$ (bortse från jordens rotation). Vilken är den högsta höjd h projektilen når, om luftmotståndet kan försummas? Beräkna för $v_0 = 5.0$ km/s och $\alpha = 45°$! (Det kan vara lämpligt att göra sina uttryck mer överskådliga genom att uttrycka saker i den dimensionslösa parametern $x = v_0^2 R/(2\gamma)$, där $\gamma = gR^2$.) Verifiera, t.ex. genom serieutveckling i x, att för små hastigheter v_0, $h \approx v_0^2 \sin^2\alpha/(2g)$, som man får vid konstant tyngdacceleration! Är detta en god approximation för de numeriska värdena ovan? (Jordradien är c:a 637 mil.)
(10 poäng)

5. Den stela kroppen i figuren består av en lätt stång och en tunn homogen cirkelskiva med massan m och radien a. Den roterar runt den vertikala axeln med vinkelhastigheten Ω, riktad enligt figuren, samtidigt som den rullar utan glidning på en cirkulär skiva, som i sin tur roterar med vinkelhastigheten Ω' enligt figuren. Kroppen är fritt ledad i punkten P. Hur stor är normalkraften mellan de två skivorna? (Friktionskraften mellan skivorna i den horisontella skivans radiella riktning är noll.)
(10 poäng)



Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 23/5-2006.

1. a.



b. Corioliskraftens storlek och riktning i de sju fallen är respektive:
i) 1.4 N åt vä(n)ster   ii) noll   iii) 1.4 N uppåt   iv) 1.4 N västerut
v) 1.4 N från jordaxeln   vi) 0.7 N österut   vii) noll.

2. Jag inför ett bilfixt koordinatsystem med x-axel i bilens accelerationsriktning och y-axel uppåt. Pendelns upphängningspunkt kallar jag B, dess längd ℓ, och dess utslagsvinkel från lodlinjen, i accelerationsriktningen, θ. Jag skriver ortsvektorn för pendelns masscentrum i ett inertialsystem som $\vec{r}_G = \vec{r}_B + \vec{r}_{G/B}$. Spänningen i snöret betecknas $\vec{S}$. Pendeln är en stel kropp. Ekvationerna för dess rotation kring masscentrum och dess masscentrums rörelse är

$$I_G \ddot{\theta}\hat{z} = -\vec{r}_{G/B} \times \vec{S},$$
$$m(a\hat{x} + \ddot{\vec{r}}_{G/B}) = \vec{S} - mg\hat{y}.$$

Relativa ortsvektorn $\vec{r}_{G/B}$ har längd ℓ och bestäms helt av vinkeln θ. Vi kan använda metoden med polära koordinater och skriva

$$\vec{r}_{G/B} = \ell\hat{r}, \qquad \ddot{\vec{r}}_{G/B} = -\ell\dot{\theta}^2\hat{r} + \ell\ddot{\theta}\hat{\theta}.$$

Rörelseekvationerna är tre komponentekvationer för tre obekanta, (kraften $\vec{S}$'s två komponenter och vinkeln θ), så de skall räcka för att lösa uppgiften. Kraften $\vec{S}$ kan elimineras genom att vektormultiplicera första ekvationen med $\vec{r}_{G/B}$ och sedan addera ekvationerna. Eftersom kulans tröghetsmoment är försumbart får vi

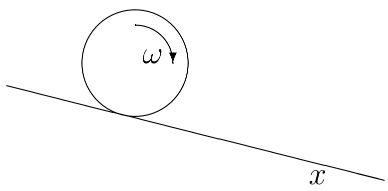
$$\vec{r}_{G/B} \times \ddot{\vec{r}}_{G/B} = \vec{r}_{G/B} \times (-a\hat{x} - g\hat{y})$$

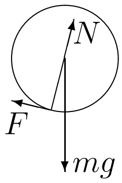
Detta ger den skalära ekvationen

$$\ell\ddot{\theta} = -a\cos\theta - g\sin\theta.$$

Denna ekvation kan alternativt och enklare härledas genom att observera att bilens acceleration ger en tröghetskraft i det bilfixa koordinatsystemet så att gravitationsaccelerationen $-g\hat{y}$ ersätts av $-a\hat{x} - g\hat{y}$.
Eftersom $a\cos\theta + g\sin\theta = \sqrt{a^2+g^2}\sin(\theta+\theta_0)$, med $\tan\theta_0 = a/g$, känner vi igen rörelseekvationen. Det är en plan pendel. Jämviktsläget är $\theta = -\theta_0$, och för små utslag ger approximationen $\sin(\theta+\theta_0) \approx \theta + \theta_0$ harmonisk svängning med periodtiden $T = 2\pi\sqrt{\ell/\sqrt{a^2+g^2}} \approx 1.54\,\text{s}$. Om bilen kör med konstant hastighet gäller samma räkning fast med $a = 0$. Då blir periodtiden en faktor $((a^2+g^2)/g^2)^{1/4} \approx 1.010$ längre.

3. .





Rörelseekvationerna för rotation kring masscentrum och för translation ger

$$\begin{aligned} I_G\dot{\omega} &= aF, \\ m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - F, \\ 0 &= N - mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

(a är klotets radie.) Om klotet rullar så är $\dot{x} = a\omega$ och $F \leq \mu N$. Vi eliminerar då F mellan de två första ekvationerna, ersätter ω med $\dot{x}/a$, löser ut $\ddot{x}$, använder tröghetsmomentet för homogen sfär, $I_G = ma^2 2/5$, och finner den sökta accelerationen vid rullning

$$\ddot{x}_{\text{rulln}} = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_G/a^2} = \frac{5}{7}g\sin\alpha.$$

Friktionskraften bestäms från den andra ekvationen, och normalkraften från den tredje. Rullningskriteriet $\mu \geq F/N$ blir

$$\mu \geq \frac{g\sin\alpha - \ddot{x}}{g\cos\alpha} = \frac{2}{7}\tan\alpha.$$

Om klotet glider så är $\dot{x} > a\omega$ och $F = \mu N$. Då bestäms vinkelacceleration och acceleration av de två första ekvationerna till

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{\text{glidn}} &= a\mu N/I_G = \mu\frac{5}{2}\cos\alpha\frac{g}{a}, \\ \ddot{x}_{\text{glidn}} &= g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \end{aligned}$$

Därmed är alla frågorna i uppgiften besvarade. Som en liten kontroll av räkningarna kan man från de sista ekvationerna beräkna

$$\ddot{x}_{\text{glidn}} - a\dot{\omega}_{\text{glidn}} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \mu\frac{5}{2}\cos\alpha) = g\cos\alpha(\tan\alpha - \frac{7}{5}\mu),$$

och kolla att detta är > 0 precis när rullningsvillkoret *inte* är uppfyllt.

4. Energi- och rörelsemängdskonserveringslagarna ger

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{m\gamma}{R} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{m\gamma}{R+h}, \\ L = mRv_0\cos\alpha &= m(R+h)v, \end{aligned}$$

där m är projektilens massa och v dess hastighet i banans högsta punkt. Detta är två ekvationer som bestämmer våra två obekanta, v och h. Eftersom h efterfrågas så eliminerar vi först v. Vi får en andragradsekvation för h

$$\frac{1}{2}(\frac{Rv_0\cos\alpha}{R+h})^2 - \frac{\gamma}{R+h} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\gamma}{R}.$$

Genom att använda den föreslagna dimensionslösa parametern x kan ekvationen skrivas enklare. Jag löser den så här

$$
\begin{aligned}
\frac{x\cos^2\alpha}{(1+h/R)^2} - \frac{1}{1+h/R} = x-1; \quad x = \frac{Rv_0^2}{2\gamma} = \frac{v_0^2}{2gR} \approx 0.2000 \\
(1-x)(1+h/R)^2 - (1+h/R) + x\cos^2\alpha = 0; \\
1+h/R = \frac{1+\sqrt{1-4x(1-x)\cos^2\alpha}}{2(1-x)}; \quad h \approx 8.94\cdot 10^5\text{m}.
\end{aligned}
$$

När man beräknar numeriska värdet på h från det sista uttrycket skall man tänka på att det förekommer rätt stora kancellationer, och använda större numerisk noggrannhet i mellanleden än man normalt behöver. En fickräknares noggrannhet räcker mer än väl i det givna exemplet. Men om x vore mycket mindre skulle den kanske inte räcka. Då kan man i stället hitta enkla approximativa uttryck för h genom att potensserieutveckla i x och behålla bara de första termerna. Om man behåller bara termer lineära i x så får man det bekanta uttrycket

$$
h \approx Rx(1-\cos^2\alpha) = v_0^2\sin^2\alpha/(2g) \approx 6.37\cdot 10^5\text{m}.
$$

I det givna exemplet är detta dock ingen god approximation.

5. Jag använder rumsfixa basvektorer $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$, och symmetriaxelfixa basvektorer $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, med $\hat{Z} = \hat{z}$ vertikal och $\hat{x}$ riktad längs stela kroppens symmetriaxel. De symmetriaxelfixa basvektorernas rotationsvektor är $\vec{\Omega} = \Omega\hat{Z}$. Stela kroppens rotationsvektor är $\vec{\omega} = \Omega\hat{z} + p\hat{x}$. I kontaktpunkten mellan stela kroppen och horisontella skivan skall bägge ha samma hastighet eftersom det är frågan om rullning utan glidning. Detta villkor bestämmer spinnet p:

$$
-R\Omega'\hat{y} = R\Omega\hat{y} + ap\hat{y} \quad \Rightarrow \quad p = -(\Omega+\Omega')R/a.
$$

De krafter som förekommer på den stela kroppen är: gravitationskraften, normalkraften $N\hat{y}$ i kontaktpunkten mellan skivorna, samt en lagerkraft i P. Enklaste sättet att komma åt normalkraften är att ställa upp rörelsemängdsmomentekvationen med avseende på punkten P, för i den bidrar lagerkraften inte. (Lagerkraften kan sedan bestämmas med masscentrums rörelseekvationer.)

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_P = R\hat{x}\times(N-mg)\hat{z} = \dot{\vec{L}}_P &= \frac{d}{dt}(I_\perp\Omega\hat{z} + I_\parallel p\hat{x}) = I_\parallel p\dot{\hat{x}} = I_\parallel p\vec{\Omega}\times\hat{x} \\
\Leftrightarrow \qquad -R(N-mg)\hat{y} &= -(ma^2/2)((\Omega+\Omega')R/a)\Omega\hat{y} \\
\Rightarrow \qquad N &= mg + ma(\Omega+\Omega')\Omega/2.
\end{aligned}
$$

Detta är det sökta uttrycket för normalkraften. Är det rimligt? Det är lätt att kolla att dimensionerna stämmer. Det är också rimligt att $N = mg$ när $\Omega = 0$, för då är rörelsemängdsmomentet konstant. Men är det rimligt att $N \to mg$ även när $a \to 0$? Då går spinnet mot oändligheten som $1/a$. Men tröghetsmomentet i symmetriaxelriktningen går mot noll som a^2. Så horisontella, tidsberoende, komponenten av rörelsemängdsmomentet går ändå mot noll. Därför är det rimligt. Däremot förvånade det mig först att inte $N \to mg$ även när $R \to 0$, för även då blir rörelsemängdsmomentet tidsoberoende. Men tänker man efter förstår man hur beräkningarna, under givna antaganden, ändå kan vara riktiga. I gränsen $R \to 0$ går tidsberoende delen av rörelsemängdsmomentet mot noll, men det gör även normalkraftens momentarm, lika snabbt. I ett av stegen i beräkningen av normalkraften dividerade vi med R. Därför skall vi inte lita på uttrycket för N när R är exakt noll. Om R är litet så är bägge termerna i ekvationen små, och även då kan resultatet vara fel om det finns någon ytterligare liten term som vi har försummat därför att den är liten. En sådan term skulle finnas om vi har radiellt riktad friktionskraft i kontaktpunkten mellan skivorna. Normalt tänker man sig att denna kraft är försumbar jämfört med den radiellt riktade kraften i P, därför att kroppen rullar i kontaktpunkten. Och detta har antagits i denna lösning. Annars blir problemet mekaniskt obestämt. Men om R är tillräckligt liten är den förmodligen inte försumbar.