

Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Fredagen 26 augusti 2005, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Göran Niklasson, tel. 7723194

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

1. För att modellera krafter mellan två atomer, speciellt ädelgaser, används ofta den s.k. Lennard-Jones-potentialen, som har utseendet

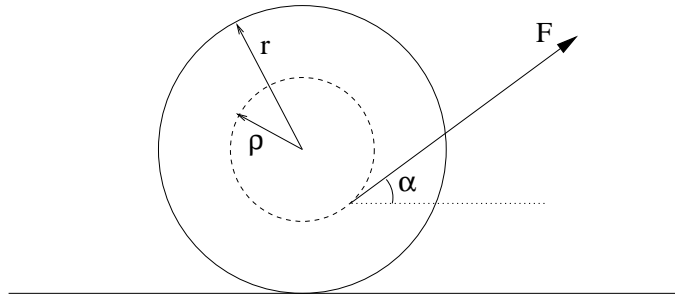
$$V(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right].$$

Den första termen ger en repulsiv kraft på små avstånd, och den andra en attraktiv kraft, van der Waals-kraft, på stora avstånd. Skissera potentialen! Bestäm jämviktsavståndet r_0 mellan de två atomerna och bindningsenergin E_0 (som är skillnaden mellan potentialens värde i oändligheten och i jämviktsläget, $E_0 = V(\infty) - V(r_0)$)! Om de två atomerna båda har massan m , vad blir vinkelfrekvensen för små radiella svängningar kring jämviktsläget?

(15 poäng)

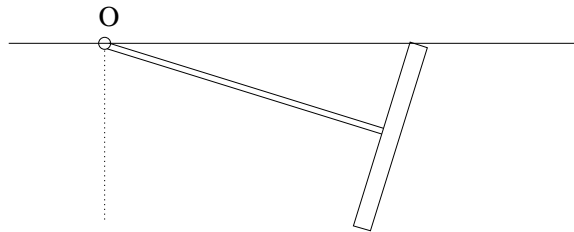
2. En bowlingbana är 19.16 m lång och 1.07 m bred. Bowlingklotet väger i allmänhet mellan 10 och 16 pounds (1 pound = 0.454 kg). Undersök, under rimliga antaganden, huruvida corioliskraften kan vara väsentlig vid bowlingspel! Om så skulle vara fallet, kan spelaren på något sätt minimera dess inverkan?
(10 poäng)

3. En trådrulle består av en homogen cylinder med massan μ och radien ϱ , samt två likaså homogena "gavlar", vardera med massan m och radien r . Den vilar på ett horisontellt bord, mot vilken friktionen är tillräcklig för att förhindra glidning. Man drager i tråden med kraften F som bildar vinkeln α mot horisontalen enligt figuren. Åt vilket håll börjar trådrullen rulla? Hur stor blir dess acceleration? (15 poäng)



Uppgifter för överbetyg

4. En rotationssymmetrisk kropp är uppbyggd av en lätt axel med längden ℓ , på vilken en tunn homogen cirkelskiva med radie r och massa m är fästad vinkelrätt mot axeln. Axels ände är momentfritt fästad i en punkt O på ett horisontellt plan, och cirkelskivan rullar utan glidning *under* planet så att precessionshastigheten runt vertikalen genom O är Ω . Hur stor måste precessionshastigheten vara för att rörelsen skall vara möjlig? Bestäm kraften på kroppen från infästningen i punkten O samt kontaktkraften på cirkelskivan i kontaktpunkten med planet (det får förutsättas att den senare saknar horisontell komponent) till storlek och riktning! (10 poäng)

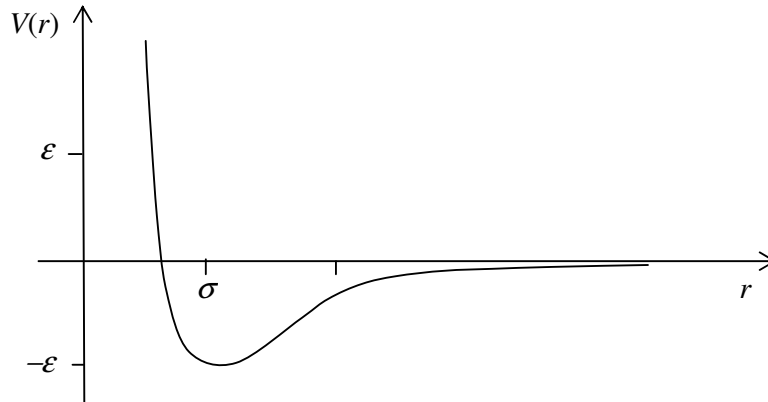


5. En roterande motor står på fjädrar med försumbar dämpning. En obalans i rotorn gör att den påverkas av en vertikal tröghetskraft $mav^2 \cos \nu t$, där m , a och ν är konstanter. Motorns totala massa är M . Man finner att motorn vid normal drift råkar i våldsamma svängningar (resonans). Genom att fästa en kropp med massan K på motorn kan man nedbringa amplituden. Alternativt kan man sätta en dämpare parallellt med fjädrarna. Vilken dämpkonstant (proportionalitetskonstant mellan hastighet och kraft) b skall i så fall väljas om man vill ha samma reduktion av svängningens amplitud? (10 poäng)

Lösningförslag till tentamen i Mekanik del 2 för F1 2005-08-26

Uppgift 1

Skiss:



Kraften mellan atomerna bestäms av potentialens derivata:

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{4\epsilon}{\sigma} \left[12 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{13} - 6 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^7 \right]$$

Jämviktsläget r_0 bestäms av att kraften $F(r_0)$ skall vara noll, vilket ger

$$r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma = 1,12\sigma$$

Bindningsenergin blir

$$E_0 = -V(r_0) = -4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r_0} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_0} \right)^6 \right] = -4\epsilon \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = \epsilon$$

I närheten av jämviktsläget kan vi använda Taylorutveckling och försumma termer av högre ordning än kvadratisk, vilket ger

$$V(r) = V(r_0) + \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

där

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r=r_0} = \frac{4\epsilon}{\sigma^2} \left[12 \cdot 13 \left(\frac{\sigma}{r_0} \right)^{14} - 6 \cdot 7 \left(\frac{\sigma}{r_0} \right)^8 \right] = \frac{24\epsilon}{\sigma^2} \left[\frac{26}{2^{7/3}} - \frac{7}{2^{4/3}} \right] \\ &= \frac{24\epsilon}{\sigma^2} \left[\frac{13}{2^{4/3}} - \frac{7}{2^{4/3}} \right] = \frac{72\epsilon}{\sqrt[3]{2}\sigma^2} \end{aligned}$$

Vi har nu reducerat modellen till en harmonisk oscillator med fjäderkonstanten k och massan $m/2$ (den "reducerade massan" för tvåkroppssystemet). Vinkelfrekvensen för små svängningar blir alltså

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{144\epsilon}{\sqrt[3]{2}m\sigma^2}} = \frac{12}{\sqrt[6]{2}} \sqrt{\frac{\epsilon}{m\sigma^2}} = 10,7 \sqrt{\frac{\epsilon}{m\sigma^2}}$$

Svar: $r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma$; $E_0 = \epsilon$; $\omega = \frac{12}{\sqrt[6]{2}} \sqrt{\frac{\epsilon}{m\sigma^2}}$

Uppgift 2

Låt oss undersöka det värsta tänkbara fallet. Det innebär spel vid nordpolen eller sydpolen, eftersom det är där corioliskraften är som störst. Vi kan vid polerna bortse från att jorden är sfärisk och alltså betrakta jordytan som en plan karusell, där vi för enkelhets skull antar att bowlingklotet kastas ut från mitten (polen), d.v.s. från en punkt som är i vila. Corioliskraften gör att klotet tycks vika av åt sidan i stället för att röra sig rätlinjigt, d.v.s. rörelsen tycks strida mot Newtons första lag, men ser vi det hela i ett större perspektiv kan vi i stället beskriva det som att klotet rör sig rätlinjigt medan målet (kägolorna) flyttar sig åt sidan för att de följer med i jordens rotation. Under ett dygn ($T = 24 \cdot 3600$ s) flyttar sig målet sträckan $2\pi L$ där L är banans längd ($L = 19,16$ m). Under den tid t då klotet är i rörelse längs banan hinner målet alltså flytta sig en sträcka δ som ges av

$$\delta = 2\pi L \frac{t}{T}$$

Med $t = 2$ s fås $\delta = 3$ mm och med $t = 3$ s fås $\delta = 4$ mm. På mera normala breddgrader blir avvikelser mindre och vid ekvatorn blir den noll. Med användning av det formella uttrycket för corioliskraften finner man att ovanstående uttryck för δ skall multipliceras med sinus för latitudvinkeln.

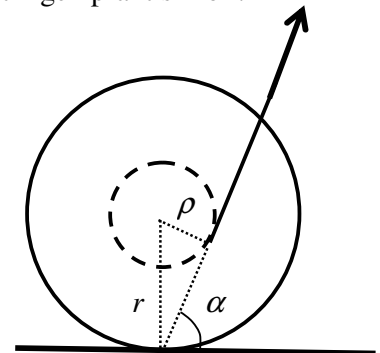
Huruvida ett par millimeters avvikelse är väsentlig eller inte är svårt att säga för den som inte har egen erfarenhet av bowling, men troligen är det oväsentligt. I praktiken gör man förstås inga beräkningar utan man lär sig spelet genom "trial and error", vilket innebär att man automatiskt bygger in hänsynstagande till alla relevanta faktorer. Om corioliskraften spelar en väsentlig roll så skulle spelare från nordliga länder få problem när de tävlar i t.ex. Australien. Så är veterligen inte fallet.

Om man av någon anledning vill minimera bidraget från corioliskraften kan man förstås göra det genom att kasta klotet med stor hastighet, så att tiden t blir liten, men det skulle kanske påverka spelet negativt i andra avseenden.

Svar: Avvikelsen är högst ett par millimeter och spelar sannolikt ingen praktisk roll.

Uppgift 3

Åt vilket håll trådrullen börjar rulla avgörs av riktningen hos kraftens moment med avseende på kontaktpunkten mot underlaget. I gränsfallet att kraftens verkningslinje går genom kontaktpunkten kommer rullen varken att rulla åt vänster eller åt höger (om man drar tillräckligt hårt börjar den glida utan att vrida sig, men i texten förutsätts att friktionen är tillräcklig för att förhindra detta).



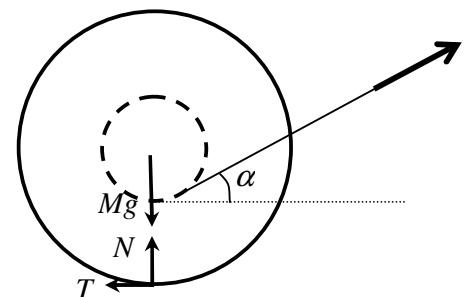
Med hjälp av figuren ser man att i gränsfallet gäller $\cos \alpha = \rho/r$. Rullningen blir åt vänster om $\alpha > \arccos(\rho/r)$ och åt höger om $\alpha < \arccos(\rho/r)$.

För att bestämma accelerationens storlek krävs en mera detaljerad analys. Vi låter M beteckna trådrullens sammanlagda massa och a dess tyngdpunktsacceleration, räknad positiv åt höger. Med kraftbeteckningar enligt figuren ger lagen för masscentrums rörelse ekvationerna

$$Ma = F \cos \alpha - T$$

$$0 = N + F \sin \alpha - Mg$$

Vid rullning utan glidning gäller att vinkelaccelerationen är a/r (med positiv riktning medurs). Impulsmomentlagen m.a.p. masscentrum ger då



$$I \frac{a}{r} = Tr - F \rho$$

där I är tröghetsmomentet m.a.p. masscentrum. Ur dessa tre ekvationer kan vi bestämma a , N och T . Resultatet för a är

$$a = \left(\frac{r \cos \alpha - \rho}{Mr^2 + I} \right) rF$$

Vi noterar att tecknet på a stämmer med vad som sades inledningsvis om rullningens riktning. Nu återstår bara att uttrycka M och I i de givna storheterna μ , m , ρ och r :

$$M = \mu + 2m$$

$$I = \frac{1}{2} \mu \rho^2 + \frac{1}{2} 2mr^2$$

Efter lite algebra fås svaret.

Svar: $a = 2r \left(\frac{r \cos \alpha - \rho}{2\mu r^2 + 6mr^2 + \mu \rho^2} \right) F$ med positiv riktning åt höger.

Uppgift 4

För att beskriva rörelsen inför vi två koordinatssystem: ett kroppsfixerat system $\xi\eta\zeta$ och ett rumsfixerat system xyz , båda med origo i O. Kroppens symmetriaxel är ζ -axeln, och den rumsfixa z -axeln pekar vertikalt nedåt. Motsvarande basvektorer betecknas med "hattar": $\hat{\xi}, \hat{z}$. Vinkeln mellan ζ -axeln och z -axeln betecknas med θ . Den är relaterad till de givna storheterna r och l genom sambandet

$$\theta = \arctan \frac{l}{r}$$

Kroppens rotationsvektor kan skrivas

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_s$$

där $\boldsymbol{\omega}_p$ beskriver precessionen och $\boldsymbol{\omega}_s$ beskriver spinnet kring symmetriaxeln:

$$\boldsymbol{\omega}_p = \Omega \hat{z}$$

$$\boldsymbol{\omega}_s = \omega_s \hat{\xi}$$

Spinnet ω_s kan uttryckas i precessionshastigheten Ω med hjälp av rullningsvillkoret, vilket ger (observera tecknet)

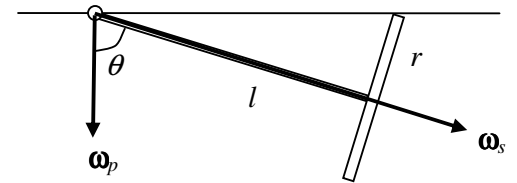
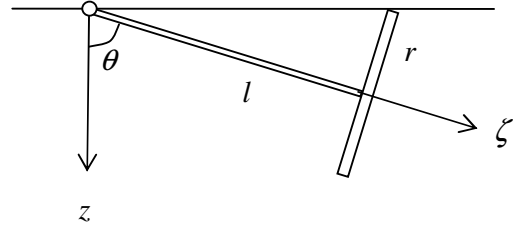
$$\omega_s = -\frac{\sqrt{r^2 + l^2}}{r} \Omega = -\frac{\Omega}{\cos \theta}$$

Kroppens rörelsemängdsmoment \mathbf{L} med avseende på punkten O är

$$\mathbf{L} = I_\xi \omega_\xi \hat{\xi} + I_\eta \omega_\eta \hat{\eta} + I_\zeta \omega_\zeta \hat{\zeta}$$

där I_ξ , I_η och I_ζ är de tre huvudtröghetsmomenten. På grund av rotationssymmetrin gäller att $I_\eta = I_\xi$. Uttrycket för rörelsemängdsmomentet kan då omformas på följande sätt:

$$\mathbf{L} = I_\xi \omega_\xi \hat{\xi} + I_\xi \omega_\eta \hat{\eta} + I_\zeta \omega_\zeta \hat{\zeta} + (I_\zeta - I_\xi) \omega_\zeta \hat{\zeta} = I_\xi \boldsymbol{\omega} + (I_\zeta - I_\xi) \omega_\zeta \hat{\zeta}$$



Med hjälp av figuren ser vi att

$$\boldsymbol{\omega}_\zeta = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\Omega} \cos \theta$$

vilket ger

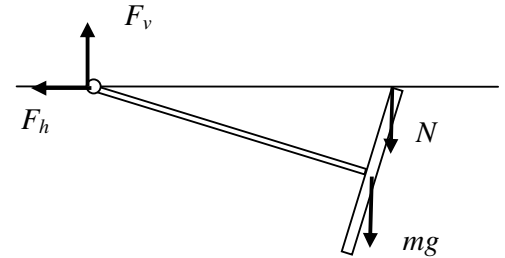
$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= I_\zeta (\boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_s \hat{\boldsymbol{\zeta}}) + (I_\zeta - I_\xi) (\boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\Omega} \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\zeta}} = I_\zeta \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{z}} + [I_\zeta \boldsymbol{\omega}_s + (I_\zeta - I_\xi) \boldsymbol{\Omega} \cos \theta] \hat{\boldsymbol{\zeta}} \\ &= I_\zeta \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{z}} + \left[-I_\zeta \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\cos \theta} + (I_\zeta - I_\xi) \boldsymbol{\Omega} \cos \theta \right] \hat{\boldsymbol{\zeta}} = I_\zeta \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{z}} - \left(I_\zeta \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + I_\xi \cos \theta \right) \boldsymbol{\Omega} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \end{aligned}$$

där vi använt rullningsvillkoret för att uttrycka $\boldsymbol{\omega}_s$ i $\boldsymbol{\Omega}$. Nästa steg är att bestämma tidsderivatan av \mathbf{L} :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{z}} \times \left[I_\zeta \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{z}} - \left(I_\zeta \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + I_\xi \cos \theta \right) \boldsymbol{\Omega} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right] \\ &= \left(I_\zeta \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + I_\xi \cos \theta \right) \boldsymbol{\Omega}^2 \hat{\boldsymbol{\zeta}} \times \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Det vektoriella kraftmomentet med avseende på O är

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= l \hat{\boldsymbol{\zeta}} \times mg \hat{\mathbf{z}} + \frac{l}{\sin^2 \theta} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \times N \hat{\mathbf{z}} \\ &= \left(mg + \frac{N}{\sin^2 \theta} \right) l \hat{\boldsymbol{\zeta}} \times \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$



Impulsmomentlagen $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$ ger nu

$$\begin{aligned} \left(I_\zeta \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + I_\xi \cos \theta \right) \boldsymbol{\Omega}^2 &= \left(mg + \frac{N}{\sin^2 \theta} \right) l \\ N &= \frac{\sin^2 \theta}{l \cos \theta} \left(I_\zeta \sin^2 \theta + I_\xi \cos^2 \theta \right) \boldsymbol{\Omega}^2 - mg \sin^2 \theta \end{aligned}$$

För att N skall vara positiv måste precessionshastigheten $\boldsymbol{\Omega}$ uppfylla villkoret

$$\boldsymbol{\Omega} \geq \sqrt{\frac{mgl}{I_\zeta \sin^2 \theta + I_\xi \cos^2 \theta}}$$

Kraftkomponenterna F_v och F_h i punkten O bestäms ur lagen för masscentrums rörelse:

$$\begin{aligned} F_v &= mg + N = mg \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{l \cos \theta} \left(I_\zeta \sin^2 \theta + I_\xi \cos^2 \theta \right) \boldsymbol{\Omega}^2 \\ F_h &= m \boldsymbol{\Omega}^2 l \sin \theta \end{aligned}$$

Nu återstår bara att sätta in uttryck för $\sin \theta$, $\cos \theta$, I_ξ och I_ζ :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}; & \cos \theta &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}} \\ I_\xi &= \frac{1}{4} mr^2 + ml^2; & I_\zeta &= \frac{1}{2} mr^2 \end{aligned}$$

Efter lite enkel algebra fås svaret

Svar: Villkoret är att

$$\boldsymbol{\Omega} \geq \frac{1}{r} \sqrt{\frac{4gl(r^2 + l^2)}{r^2 + 6l^2}}$$

Tryckkraften i kontaktpunkten är

$$N = \frac{mlr \boldsymbol{\Omega}^2}{4\sqrt{r^2 + l^2}^3} (r^2 + 6l^2) - mg \frac{l^2}{r^2 + l^2}$$

Den vertikala kraftkomponenten i O är $F_v = \frac{mlr\Omega^2}{4\sqrt{r^2+l^2}^3}(r^2+6l^2) + mg \frac{r^2}{r^2+l^2}$

Den horisontella kraftkomponenten i O är $F_h = \frac{m\Omega^2 l^2}{\sqrt{r^2+l^2}}$

F_v är riktad uppåt och F_h är riktad inåt (centripetalkraft).

Uppgift 5

Antag att den sammanlagda fjäderkonstanten är k och låt x beteckna motorns koordinat i vertikal led. Rörelseekvationen i närvaro av dämpare men utan extra vikt blir då

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + mav^2 \cos vt$$

vilket kan skrivas som

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{m}{M}av^2 \cos vt$$

Detta är en linjär inhomogen differentialekvation som lätt kan lösas. Efter det att insvängningsförloppet har dött ut fås en stationär svängningsrörelse med amplituden (se t.ex. Physics Handbook):

$$A = \frac{mav^2}{\sqrt{(k - Mv^2)^2 + (bv)^2}}$$

Utän dämpare ($b = 0$) men med en extra massa K fås i stället

$$A = \frac{mav^2}{\sqrt{(k - Mv^2 - Kv^2)^2}}$$

Enligt förutsättningen skall dessa två uttryck för A vara lika vilket innebär att

$$(k - Mv^2)^2 + (bv)^2 = (k - Mv^2 - Kv^2)^2$$

Dessutom sägs att resonans uppkommer om både dämpare och extravikt saknas. Det innebär att $k = Mv^2$. Villkoret ovan förenklas då till

$$(bv)^2 = (Kv^2)^2$$

vilket ger svaret.

Svar: $b = Kv$