Tentamen i Mekanik för F, del B
Måndagen 10 januari 2005, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Ludvig Lizana, tel. 7723187

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Nedan ges tre exempel på resultat från uträkningar i mekanikproblem. Beskriv för vart och ett av dem hur en rutinmässig kontroll visar att svaret är felaktigt. Föreslå för vart och ett av resultaten en enkel förändring som gör det rimligt. Observera att det inte frågas efter en lösning av uppgifterna, och att en sådan utan ovanstående element inte premieras. (12 poäng — 4 poäng per korrekt besvarad deluppgift)

   a. Man räknar ut hur avståndet s mellan två massor m_1 och m_2 (som bara kan röra sig längs en rät linje) ändras med tiden då massorna attraherar varandra med den elektrostatiska kraften $F(s) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^2}$, och erhåller under räkningen differentialekvationen $\ddot{s} = -\frac{F(s)}{\mu}$, där $\mu = \frac{m_1 m_2}{|m_1 - m_2|}$.

   b. En rymdstation består av tre likadana homogena rör böjda i cirkelform (torusar) och sammansatta så att de bildar rät vinkel mot varandra (t.ex. kan man beskriva ett av rörens mittlinjer som kurvan $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, $\zeta = 0$, och de andra med permutationer av de kroppsfixa koordinaterna (ξ, η, ζ) som bildar ett ortonormalt system). Man vill räkna ut hur stationen beter sig efter det att en farkost har skjutits ut från den, vilket resulterar i en impuls samt ett impulsmoment m.a.p. stationens masscentrum. Man finner att stationens rotationsvektor bildar vinkeln $5°$ mot rörelsemängdsmomentet, och utför en precessionsrörelse runt denna.

   c. Man vill uppskatta plancklängden ℓ_P, den fundamentala längdskalan i kvantgravitation, och använder naturkonstanterna c (ljushastigheten), G (Newtons gravitationskonstant) och $\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34}\, Js$ (Plancks konstant). Resultatet blir $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$.

2. En partikel utför endimensionell rörelse, och är utsatt för en återförande fjäderkraft samt en linjär dämpkraft så att dämpningen är kritisk. Vid rörelse under samma fjäderkraft men utan dämpning är vinkelfrekvensen för partikelns oscillationer ω_0. Vilket/vilka villkor skall begynnelseläget och begynnelsehastigheten vid tiden 0 uppfylla för att partikeln vid någon tidpunkt $0 < t < \infty$ skall passera jämviktsläget? Hur många gånger kan den göra det? (16 poäng)

3. En kropp som kan röra sig (friktionsfritt) på ytan av en roterande sfär, t.ex. jorden, rör sig i en cirkelbana relativt ytan. Detta gäller sålänge breddgraden förblir ungefär densamma under hela rörelsen. Beräkna radien för en sådan rörelse, uttryckt i fart, jordens rotationshastighet samt breddgraden. Använd uttrycket för att, väldigt grovt, uppskatta storleken på ett roterande vädersystem, utgående från rimliga vindhastigheter. (16 poäng)

4.

En rotationssymmetrisk kropp är upphängd i en punkt så att den kan rotera kring sin egen axel, samtidigt som axeln kan röra sig endast i ett vertikalt plan (pendelrörelse). Se figuren, där den högra bilden är sedd från höger i den vänstra. Figuren skall inte tolkas som en beskrivning av kroppens geometri, utöver rotationssymmetrin. Kroppen rör sig under inverkan endast av tyngdkrafter samt krafter i upphängningen, all friktion kan försummas. Låt kroppens rotationshastighet runt sin symmetriaxel vara ν, och vinkeln som symmetriaxeln bildar med vertikalen vara ϕ.

Kommer ν att vara konstant under rörelsen?

Skiljer sig ϕ:s tidsberoende hos en sådan här pendel från det hos en pendel som inte spinner?

Beräkna, till storlek och riktning, det vridande momentet på kroppen från upphängningsanordningen, som funktion av ϕ och lämpliga införda konstanter. (16 poäng)

Lösning till Tentamen mekFB 050110

1. a. Om massorna är lika ($m_1 \to m_2$) medför det att $\mu \to \infty$ samt att accelerationen $\ddot{s} \to 0$ vilket är orimligt. Genom att ställa upp netwons andra lag för systemet erhålls samma differentialekavation $\ddot{s} = -\frac{F(s)}{\mu}$ men med $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ vilket är den reducerade massan.

   b. Rymdstationen består av tre torusar (cykelslangar eller munkar) som alla är vinkelräta mot varandra. Ett sätt att visualisera stationen är att sätta ihop tre ortogonala stänger (ξ, η, ζ) och därefter hänga på de tre torusarna på var sin stång. På så sätt blir även de vinkelräta mot varandra. När rymdfarkosten lämnar stationen får stationen en impulssörelse $\vec{p}$ m.a.p på masscentrum samt en rotationsrörelse $\vec{\omega}$ runt masscentrum, där $\vec{\omega}$ och $\vec{p}$ är vinkelräta mot varandra. Då kroppen är sfärisk symmetrisk kommer dessutom rörelsemängdsmomentet $\vec{L}$ och rotationen $\vec{w}$ att peka i samma rikting. Stationen kommer därför inte att precessera. Däremot, om kroppen *inte* varit sfärisk symmetrisk hade den mycket väl kunnat precessera då $\vec{L}$ och $\vec{w}$ inte nödvändigtvis är parallella.

   c. Enhetsanalys: $\ell_p \sim [m]$ och $\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim [s]$. För att dimensionen skall stämma krävs ett extra [m/s] dvs c. Rätt svar är alltså

$$\ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim [m]. \tag{1}$$

2. Rörelseekvation för systemet:

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

   Karakteristisk ekvation:

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \tag{3}$$

   Kristisk dämpning:

$$\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r_1 = r_2 = -\frac{\gamma}{2} \tag{4}$$

   Lösning:

$$x(t) = e^{-t/\tau}\,(A + Bt) \tag{5}$$

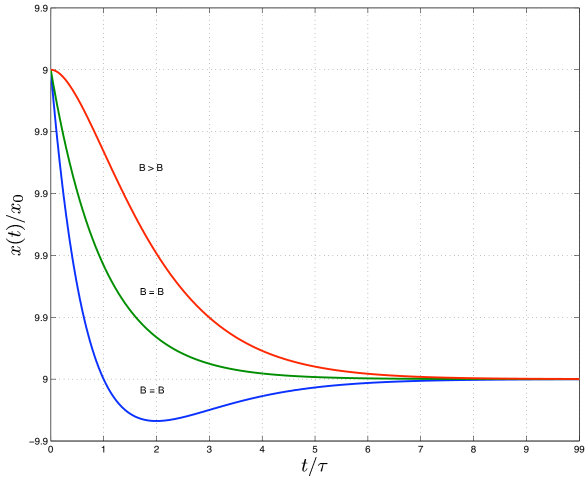
   där $\tau = 2/\gamma$. Låt origo vara partikelns jämviktsläge. Vid tiden $t = 0$ är den förflyttad en sträcka $x_0 > 0$ från den punkten samt att den har en hastighet $v_0 > 0$ (riktad mot jämviktsälget).

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = -v_0 \tag{6}$$

   Detta ger att

$$A = x_0 \quad B = \frac{x_0}{\tau} - v_0 \tag{7}$$

   För att partikeln skall passera jämviktsläget $x(t) < 0$ krävs att $B < 0$ dvs $v_0 > \frac{x_0}{\tau}$ [1] (se figur). Figuren visar också att jämviktsläget bra kan passeras en gång under rätt förutsättningar.



3. En partikel rör sig (friktionsfritt) på ett sfäriskt skal med hastigheten $\vec{v}$. Corioliskraften ger upphov till en kraft som alltid är vinkelrät mot $\vec{v}$ vilket resulterar i en centralrörelse [2] (jämför hur ett magnetfält $\mathbf{B}$ böjer trajektorian av en elektrisk laddning q).

   Hur stor är kraften som verkar på partikeln i ytans plan? Låt partikeln ha massan m och låt jordens rotationshastigehet (kring sin egen axel) vara Ω_E. Corioliskraften är då

$$\vec{F}_{\text{corr}} = -2m\vec{\Omega}_E \times \vec{v}. \tag{8}$$

   Ω_E kan delas upp i två komponenter: en komponent som ligger i planet $\vec{\Omega}_H$ samt en som är vinkelrät mot planet $\vec{\Omega}_V$. Då $\vec{v}$ också ligger i planet pekar vektorn $\vec{\Omega}_H \times \vec{v}$ vinkelrät mot ytan dvs påverkar inte dess rörelse på sfären. Däremot så ligger $\vec{\Omega}_V \times \vec{v}$ i planet och är alltid vinkelrät mot $\vec{v}$ (därav centralrörelsen). $\vec{\Omega}_V$ kan skrivas om i termer av breddgraden θ som $\vec{\Omega}_V = \Omega_E \sin\theta\, \hat{r}$ där $\Omega_E = |\vec{\Omega}_E|$. Kraften som ger upphov till partikelns cirkelrörelse är alltså

$$\vec{F}_{\text{c}} = -2m\Omega_E \sin\theta\, \hat{r} \times \vec{v}. \tag{9}$$

   Radien för en sådan rörelse kan uppskattas med Newtons andra lag $F_c = ma_c$ där $F_c = |\vec{F}_{\text{c}}|$ och $a_c = \frac{v^2}{r}$. Detta ger uttrycket

$$r = \frac{v}{2\Omega_E \sin\theta} \quad [m]. \tag{10}$$

   Från denna ekvation kan en enkel storleksuppskattning göras av ett roterande vädersystem. Om

$$v \sim 30 \text{ m/s} \qquad \Omega_E \sim 10^{-5} \text{ 1/s} \qquad \theta \sim \frac{\pi}{4} \tag{11}$$

   blir vädersystemets radie

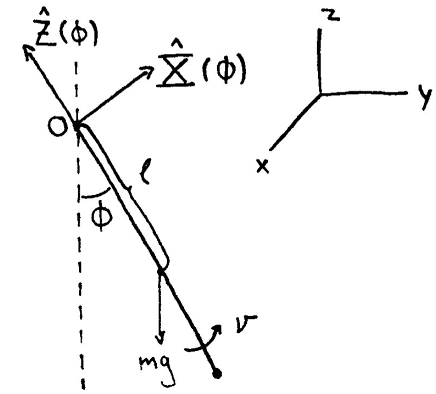
$$r \sim 200 \text{ mil}. \tag{12}$$

---

[1] Observera att denna analys gäller för $x(0) = x_0$. Om man väljer $x(0) = -x_0$ måste $\dot{x}(0) = v_0$.
[2] Se D.Kleppner och R.J Kolenkow *An Introduction to Mechanics* sid. 364-367.

4

Vridmomentet från infästningen hindrar rörelse i $\hat{x}$-led, vidare följer det vridande momentet pendelrörelsen. Således är detta vridmoment vinkelrätt mot $\hat{x}$ och $\hat{Z}(\phi)$.



$$\mathbb{M}_o = \ell mg\sin\phi(-\hat{x}) + M_{inf}(\phi)\hat{\underline{Z}}(\phi)$$

$$\omega = \nu + \Omega = \nu\hat{Z}(\phi) + \dot{\phi}(-\hat{x})$$

$$\mathbb{H}_o = I_{xx}\dot{\phi}\hat{x} + I_{\parallel}\nu\hat{Z}(\phi) =$$

$$= I_{xx}\dot{\phi}\hat{x} - I_{\parallel}\nu\sin\phi\,\hat{y} + I_{\parallel}\nu\cos\phi\,\hat{z}$$

$$\begin{cases} \hat{Z}(\phi) = -\sin\phi\,\hat{y} + \cos\phi\,\hat{z} \\ \hat{\underline{X}}(\phi) = \cos\phi\,\hat{y} + \sin\phi\,\hat{z} \end{cases}$$

Sätts in i ekv.

$$\sum \mathbb{M}_o = (\dot{\mathbb{H}})_{xyz} + \Omega \times \mathbb{H}_o$$

$$\Omega \times \mathbb{H}_o = I_{\parallel}\nu\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x}\times\hat{y} - I_{\parallel}\nu\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x}\times\hat{z} =$$

$$= I_{\parallel}\nu\dot{\phi}\,\hat{\underline{X}}(\phi)$$

$$(\dot{\mathbb{H}}_o)_{xyz} = I_{xx}\ddot{\phi}\hat{x} + I_{\parallel}\dot{\nu}\hat{Z}(\phi)$$

Men $M_{inf}(\phi)\hat{\underline{Z}}(\phi)$ har ingen projektion på $\hat{Z}(\phi)$ och således förändras inte ν under pendelrörelsen $\Rightarrow \dot{\nu} = 0$.

Vi har således ekvationen

$$-mgl\sin\phi\,\hat{x} + M_{inf}(\phi)\,\hat{\underline{X}}(\phi) = I_{xx}\ddot{\phi}\,\hat{x} + I_{\parallel}\nu\dot{\phi}\,\hat{\underline{X}}(\phi),$$

vilken har "lösningen"

$$M_{inf}(\phi) = \dot{\phi} I_{\parallel} \nu \qquad (1)$$

$$-mgl\sin\phi = I_{xx}\ddot{\phi} \qquad (2)$$

Svar:

Spinnet är konstant och påverkar inte pendelrörelsen ty (2) är rörelseekv. för en pendel. Vidare ges $M_{inf}(\phi)$ av

$$M_{inf}(\phi) = \dot{\phi} I_{\parallel} \nu .$$