Tentamen i Mekanik för F, del B
Måndagen 12 januari 2004, 8.45-12.45, V-huset
Examinator och jour: Martin Cederwall, tel. 7723181, 0733-500886

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar, utom på fråga 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Ange vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska! (12 poäng, dvs. 2 poäng för varje korrekt svar utöver 6)

    En viskös dämpkraft är konservativ exakt då dämpningen är kritisk.

    Tidvattenkrafter kan sägas bero på att gravitationsfältet inte är konstant, och att de olika delarna av en (stel) kropp därför inte samtidigt kan vara i fritt fall.

    Rörelsemängden är alltid bevarad, och därför är rörelseekvationen för en kropp vars massa inte är konstant (dm/dt)v+m(dv/dt)=0 ("raketekvationen").

    Energin är alltid bevarad, och närvaron av en "icke-konservativ" kraft är ett uttryck för att energi omvandlas till former som inte kan hanteras i Newtonsk mekanik.

    Rörelsemängdsmomentet är alltid bevarat.

    Om en kropp i något (ortogonalt) koordinatsystem har samtliga deviationsmoment noll gäller detta i alla system.

    Om en kropp i något (ortogonalt) koordinatsystem har samtliga deviationsmoment noll och de tre tröghetsmomenten lika gäller detta i alla system.

    Hela jordens befolkning skulle få plats stående på Gotland.

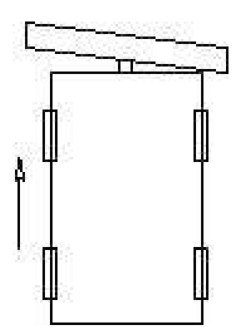
    En leksakssnurra, som utför reguljär precessionsrörelse under inverkan av tyngdkraften, precesserar långsammare på månen än på jorden.

    Alla ekvationer som styr tvådimensionell rotationsrörelse (rörelseekvation, uttryck för energi etc.) är helt analoga med ekvationerna för endimensionell translationsrörelse.

    Om man jämför oscillationsfrekvensen för en massa fäst via en fjäder i en vägg med den för samma situation där den fasta väggen är ersatt med en tung kropp, är den senare högre än den förra.

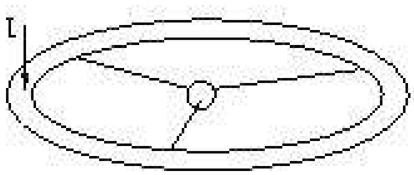
    Om två huvudtröghetsmoment är lika, är också varje axel i det plan som spänns av motsvarande huvudtröghetsaxlar en huvudtröghetsaxel med samma huvudtröghetsmoment.

2. En cylindrisk kropp med densitet lägre än vattens flyter så att axeln är vertikal.
    a. Bestäm jämviktsläget i vertikalled.
    b. Antag att vattenflödet då cylindern rör sig uppåt och nedåt är sådant att vattnets rörelseenergi är försumbar jämfört med cylinderns. Visa att cylindern under dessa förutsättningar utför harmonisk svängningsrörelse i vertikalled och bestäm svängningarnas vinkelfrekvens.
    c. Om det tidigare antagandet inte är riktigt, och man modellerar den dissipativa kraften som en liten konstant b gånger hastigheten, bestäm den typiska tidsskalan för dissipation. Vad exakt menas med att b är "liten"?
    (Alla svar skall uttryckas i termer av kroppens och vattnets densiteter samt kroppens dimensioner.) (16 poäng)



3. En snöplog röjer en väg med nyfallen snö. Snön är 50 cm djup och har en densitet på 150 kg/m^3. Plogbilen ser ut som skissat i figuren till höger och väger 4 ton. Bredden på skoveln framtill är 2.5 m. Snön som lämnar skoveln åt höger kan antas ha samma hastighet som plogen.
    a. Om plogbilen åker med den konstanta farten 10 m/s, vilken effekt behöver motorn utveckla (övriga förluster borträknade)?

b. Om motorn plötsligt slutar driva, hur låt hinner plogbilen innan dess fart har sjunkit till hälften (om man försummar rullfriktion, luftmotstånd etc.)?
c. Anser du att antagandet att andra dissipativa krafter är små i jämförelse är rimligt? (12 poäng)



4. En rymdstation är formad som en smal torus ("doughnut") enligt figuren. Dess radie är 100 m och dess massa 20 kiloton. Massan i öriga delar av rymdstationen är försumbar. Stationen roterar kring sin symmetriaxel så att den upplevda gravitationsaccelerationen vid periferin skall vara 0.75 g. Vid ett tillfälle skjuts en rymdfarkost ut från torusen i en riktning parallell med rotationsaxeln, vilket åstadkommer en impuls i motsatt riktning av storleken 10 kNs. Beskriv rymdstationens rotationsrörelse därefter i termer av spinn och precession! (20 poäng)

Lösningar till tentamen i Mekanik F del B 12 januari 2003

1. FSF SSF SSS SSS

2. Trycket på cylinderns bottenyta är $p = \rho_0 g x$ $[Nm^{-2} = (kgm^{-3})(ms^{-2})m]$, där ρ_0 är vattnets densitet och x avståndet från bottenytan till vattenytan. Lyftkraften är allstå $F_{\text{lyft}} = -\rho_0 g x A$, där A är cylinderns tvärsnittsarea, och minustecknet kommer av att jag väljer samma referensriktning för kraften som för läget x. Tyngdkraften är $F_g = mg = \rho A h g$, där ρ är kroppens densitet och h cylinderns längd. Cylinderns rörelseekvation blir alltså

$$\rho A h \ddot{x} = -\rho_0 A g x + \rho A g h = -\rho_0 A g \left(x - \frac{\rho}{\rho_0} h \right)$$

Jämviktsläget är $x = x_0 = \frac{\rho}{\rho_0} h$ (verkar rimligt—en mycket lätt cylinder sjunker knappt ned alls, medan en som nästan har vattnets densitet är nästan helt nedsänkt). Definiera koordinaten y som är noll i jvktsläget: $y = x - x_0$. Rörelseekvationen blir

$$\ddot{y} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{g}{h} y = 0$$

varur vinkelfrekvensen avläses: $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{g}{h}}$. Dimensionerna är uppenbara.

Om det dessutom finns en dämpkraft blir ekvationen

$$\ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

där $\gamma = \frac{b}{2\rho A h}$. Den karakteristiska ekvationen, $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$, har lösningar $r = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, och man får svagt dämpade svängningar som avtar exponentiellt på en tidsskala γ^{-1}. Påståendet "b är liten" betyder att $\gamma << \omega_0$.

Dimensionskontroll: $[\gamma^{-1}] = [\rho A h b^{-1}] = kgm^{-3} m^3 (Nsm^{-1})^{-1} = s$.

3. Plogens hastighet: $v = 10m/s$, snöns densitet $\rho = 150kg/m^3$, plogens tvärsnittsarea: $A = 2.5 \times .5 = 1.25m^2$.

Massa snö per tidsenhet som accelereras från vila till hastigheten v: $\dot{m} = \rho A v$. Impulsökning per tidsenhet = kraft: $F = \dot{m} v = \rho A v^2$ (vad som händer med snön efter den har lämnat skoveln spelar ingen roll). Effekten är $P = Fv = \rho A v^3$.

Numeriskt: $P = 150 \times 1.25 \times 1000 \approx .2MW$.

Dimensionskontroll (enheter): $[\rho A v^3] = kgm^{-3} \times m^2 \times (ms^{-1})^3 = kgm^2 s^{-1} = W$.

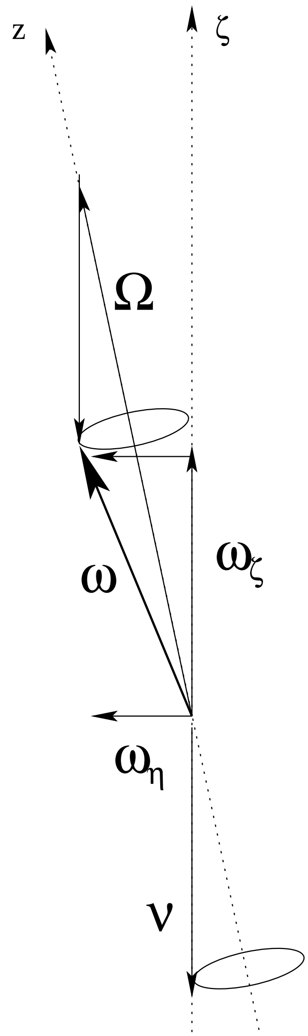
Om motorn slutar driva vid $x = 0$, $v = v_0$, är $ma = mv\frac{dv}{dx} = -\rho A v^2$, med lösningen $v = v_0 e^{-\frac{\rho A}{m}x}$. Hastigheten sjunker till hälften efter sträckan $x = \frac{m}{\rho A}\log 2 \approx 15m$ (rimlighet: efter denna sträcka är massan hos den bortröjda snön jämförbar med bilens massa). En bil som börjar rulla med $10m/s$ tar normalt mycket längre sträcka för att tappa en stor del av sin fart, så det är nog inte helt orimligt att kasta andra motståndskrafter...

4. Beteckna koordinatriktningar anpassade till rymdstationen med ξ, η, ζ, där ζ-axeln ligger längs symmetriaxeln. Rymdstationen har tröghetsmoment $I_\zeta = mR^2$ med avseende på sin symmetriaxel och $I_\perp = \frac{1}{2}mR^2$ med avseende på axlar vinkelräta mot symmetriaxeln. Före stöten har den ett rörelsemängdsmoment $\mathbb{L}_0 = I_\zeta \omega_0$, där ω_0 är rotationshastigheten. Denna bestäms av den effektiva tyngaccelerationen $\tilde{g} = .75g = R\omega_0^2$. Numeriskt är $\omega_0 \approx .27s^{-1}$, $L_0 \approx 5.4 \times 10^{10} kgm^2s^{-1}$.

Impulsen $\mathbb{I}$ verkar enligt figuren i uppgiften. I vårt koordinatsystem är $\mathbb{I} = -I\hat{\zeta}$. Låt ξ-axeln gå genom angreppspunkten. Då fås ändringen i rörelsemängdsmoment $\Delta\mathbb{L} = R\hat{\xi} \times \mathbb{I} = RI\hat{\eta}$. Numeriskt är denna ändring till beloppet mycket mindre än L_0, $\frac{|\Delta\mathbb{L}|}{L_0} \approx 1.8 \times 10^{-5}$. Kalla detta lilla tal för α.

Rörelsemängdsmomentet efter stöten är $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 + \Delta\mathbb{L} = L_0(\hat{\zeta} + \alpha\hat{\eta})$. Eftersom det inte finns några vridande moment kommer $\mathbb{L}$ att förbli konstant. Den definierar en rumsfix riktning $\hat{z}$ som rotationsvektorn kommer att precessera kring. Rotationsvektorn $\vec{\omega}$ omedelbart efter stöten fås från $\mathbb{L} = I_\zeta \omega_\zeta + I_\perp \omega_\eta$, så $\vec{\omega} = \omega_0(\hat{\zeta} + 2\alpha\hat{\eta})$. Om man istället sönderlägger $\vec{\omega}$ i en del längs $\hat{\zeta}$ (spinn) och en längs $\hat{z} = (1+\alpha^2)^{-1/2}(\hat{\zeta} + \alpha\hat{z})$ (precession), så får man $\vec{\omega} = \nu\hat{\zeta} + \Omega\hat{z}$, där $\nu = -\omega_0$ och $\Omega = 2\sqrt{1+\alpha^2}\omega_0 \approx 2\omega_0$.

På nästa sida finns en bild som visar ungefär hur det ser ut, om man förstorar upp vinkeln mellan $\hat{z}$ och $\hat{\zeta}$, som ju är ungefär α mätt i radianer. Spinnvektorn är nästan precis motriktad precessionsvektorn och hälften så lång som den. Spinnvektorn, liksom alltså totala rotationsvektorn, precesserar runt Ω som visat i figuren. Rymdstationens plan är hela tiden vinkelrätt mot spinnvektorn. Effekten är en mycket liten variation hos $\vec{\omega}$, och alltså en mycket liten "wobblande" rörelse hos rymdstationen.



/Martin Cederwall 11 januari 2004