Sammanfattning av Meriam & Kraige Dynamics
Eller: Mekanik II for dummies

Sara Nordin Hällgren
sarhal@student.chalmers.se
F14

1 oktober 2019

Innehåll

1. Introduktion

Min erfarenhet av MekII är denna: boken är otroligt pratig och har ett orimligt antal specialfall man måste hålla koll på. Föreläsaren skriver ner några (lite för) generella formler och går sedan vidare. Jag tänkte att detta kompendium ska vara som ett mellanting.

2. Förkunskaper (inses fan inte så lätt)

Bevarande av: energi rörelsemängd rörelsemängdsmoment

Om vi vet momentet i en punkt A (momentresultant)

$$\mathbf{M_A} = \mathbf{r_{B/A}} \times \mathbf{F}_B \tag{1}$$

3. Plan kinematik för stelkroppar

Vad är kinematik? Kinematik är en gren av dynamik som beskriver rörelsen hos kroppar utan att behandla de krafter som ger upphov till rörelsen, eller skapas av den. Vi är huvudsakligen intresserade av hur objekt rör sig geometriskt - detta är egentligen mer matematik än fysik.

Generell stelkroppsrörelse består av både linjära och roterande förflyttningar, hastigheter och accelerationer. Målet är att beskriva hur en stelkropp rör sig baserat på krafterna som verkar på den. I detta kapitel begränsar vi oss till plan, eller tvådimensionell, rörelse. Här antas en kropps masscentrum ligga i rörelseplanet.

Stelkropp: ett system av partiklar vars inbördes avstånd inte ändras. Vi har alltså inga fluider eller deformation - detta är generellt sett ett bra antagande.
Translation: Alla punkter på kroppen rör sig likadant (samma hastighet och acceleration).
Rotation kring en axel: alla punkter i kroppen som är vinkelräta mot rotationsaxeln rör sig samma vinkel på samma tid.
Generell plan rörelse: är en kombination av rotation och translation.

Vi behandlar oftast generell plan rörelse. Att analysera plan rörelse görs antingen genom att identifiera absoluta förflyttningar och sedan tidsderivera, eller att ta ett mellansteg genom relativ rörelse.

3.1. Rotation

Alla punkter på en stelkropp i plan rörelse har samma vinkelförflyttning, -hastighet, och -acceleration. Det går alltid att definiera en axel, fiktiv eller ej, som man tänker sig att kroppen roterar runt - punkter som skär denna axel rör sig inte.

Vinkelhastighet ω och vinkelacceleration α härleds från vinkeln θ:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\ , \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \tag{2}$$

Här är positiv riktning för ω och α samma som för θ. Trots att de kan vara ickeintuitiva finns det analogier mellan roterande och translaterande rörelser. För konstant vinkelacceleration så gäller för vinkelhastigheten att $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Jämför detta med $v(t) = v_0 + at$ för translationsrörelse.

3.1.1. Beräkna hastighet eller acceleration i en punkt

Tänk dig en kropp som roterar med vinkelhastighet ω kring en axel vinkelrät mot planet. z-axeln väljs i regel kring denna rotationsaxel, och vinkelhastigheten kan då uttryckas på vektorform som $\overrightarrow{\omega} = \omega\hat{z}$. Betrakta en fix punkt A på avstånd r från axeln. Om vektorn $\mathbf{r}$ definieras i riktning från origo till A, så fås hastigheten i punkt A genom:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r} \tag{3}$$

Accelerationen i punkten fås genom ytterligare derivering:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \mathbf{r} = \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \mathbf{r} \tag{4}$$

Vi noterar här att $\mathbf{a}$ kan delas upp i en kompontent parallell med $\mathbf{r}$ och en vinkelrät:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} \tag{5}$$

Där de individuella komponenterna ges av:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{6}$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \mathbf{r} = \overrightarrow{\alpha} \times \mathbf{r} \tag{7}$$

Sample problem 5.1, page 331

3.2. Absolut rörelse

En metod för att analysera hur en stelkropp rör sig är **absolut rörelse**. Här betraktar vi kroppen utifrån, ur ett stationärt koordinatsystem, och kan ställa upp ekvationer för dess förflyttning. Hastighet och acceleration får vi genom att tidsderivera. Detta är en rättfram metod som vi är vana vid sedan tidigare. Om den geometriska beskrivningen blir komplex kan det dock bli enklare att räkna med relativ rörelse istället. Efter att ha arbetat en del med båda dessa metoder bör det bli enklare att välja mellan dem.

Sample problem 5.4, page 339

3.3. Relativ rörelse

Det andra tillvägagångssättet för att behandla stelkroppsrörelse är **relativ rörelse**. Vi väljer punkterna A och B som ligger på samma stelkropp. Vektorn från ett godtyckligt origo till punkt A kan då skrivas:

$$\mathbf{r_A} = \mathbf{r_B} + \mathbf{r_{A/B}} \tag{8}$$

Detta är vektorn till punkt B plus vektorn från B till A. Denna uppdelning ser kladdig ut, men kommer visa sig göra vårt liv lättare. Om vi sedan observerar en ändring hos A:s position under en liten tid Δt skrivs denna:

$$\Delta\mathbf{r_A} = \Delta\mathbf{r_B} + \Delta\mathbf{r_{A/B}}$$

Vilket beskriver hur B rört sig och hur A rört sig relativt B. Om vi dividerar båda leden med Δt fås:

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \mathbf{v_{A/B}} \tag{9}$$

Detta är hastigheten hos punkt B plus hastigheten av A relativt B. Vi noterar dock att oavsett hur kroppen rör sig, så kommer avståndet $r_{A/B}$ mellan A och B att vara detsamma (eftersom det är just en stelkropp). A kan alltså inte translatera relativt B, utan endast rotera. Vi har därmed lyckats dela upp A:s hastighet i två delar: hastigheten hos B plus rotationshastigheten kring B. För denna **relativa hastighet** gäller i enlighet med (3):

$$\mathbf{v_{A/B}} = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r_{A/B}} \tag{10}$$

Här är $\overrightarrow{\omega}$ den absoluta vinkelhastigheten för stelkroppen och därmed även för vektorn $\mathbf{r_{A/B}}$. Det faktum att den relativa rörelsen alltid är vinkelrät mot vektorn som knyter samman punkterna är viktigt i många uppgifter:

$$\mathbf{v_{A/B}} \perp \mathbf{r_{A/B}} \tag{11}$$

Sample problem 5.7, page 351

Vi vill också kunna beräkna punkt A:s **relativa acceleration**. Denna fås genom att tidsderivera (9):

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_B} + \mathbf{a_{A/B}} \tag{12}$$

Eftersom vi ser en relativ roterande rörelse kring B, så kommer den relativa accelerationen $\mathbf{a_{A/B}}$ att ha två komponenter: en parallell komponent från $\mathbf{v_{A/B}}$:s ändring i riktning, och en vinkelrät komponent från $\mathbf{v_{A/B}}$:s ändring i magnitud. Detta skrivs i enlighet med (5):

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_B} + \mathbf{a_{A/B}}_{,\ \parallel} + \mathbf{a_{A/B}}_{,\ \perp} \tag{13}$$

Och de individuella komponenterna ges av:

$$\mathbf{a_{A/B}}_{,\ \parallel} = \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r_{A/B}}) \tag{14}$$

$$\mathbf{a_{A/B}}_{,\ \perp} = \overrightarrow{\alpha} \times \mathbf{r_{A/B}} \tag{15}$$

Vi noterar att även den **relativa accelerationen** beror på den **absoluta** vinkelhastigheten och accelerationen för systemet. Det finns alltså inte en absolut och en relativ vinkelhastighet att ta hänsyn till! Att räkna med relativ rörelse låter oss dock dela upp våra problem i en translations- och en rotationsdel.

Sample problem 5.14, page 375

3.4. Rörelse relativt roterande koordinatsystem

Hitills har vi använt oss av ett absolut (ickeroterande) koordinatsystem för att beskriva relativ hastighet och acceleration. Att använda koordinater som roterar med stelkroppen kommer dock visa sig förenkla uträkningarna i många problem under kursens gång. För att börja beskriva rörelse i termer av roterande axlar så börjar vi med att studera plan rörelse hos två partiklar A och B, i ett fixt XY-plan. För generalitetens skull antas partiklarna röra sig oberoende av varandra. A:s rörelse observeras utifrån det roterande koordinatsystemet xy, som har sitt origo fäst i punkt B och roterar med vinkelhastighet $\omega = \dot{\theta}$.

Värt att notera redan nu är att vi kan behöva uttrycka två koordinatsystem samtidigt. Jag kommer försöka hålla mig till denna konvention: stationära koordinater yttrycks i de gamla hederliga $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. För roterande koordinatsystem kommer jag införa nya basvektorer $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. I detta fall skrivs vinkelhastigheten för xy-systemet som $\overrightarrow{\omega} = \omega\hat{k}$. Denna vektor är ortogonal mot rörelseplanet och har positiv riktning i positiv $\hat{z}$-led. Då skrivs A:s position i absoluta koordinater som:

$$\mathbf{r_A} = \mathbf{r_B} + \mathbf{r_{A/B}} \equiv \mathbf{r_B} + \mathbf{r} = \mathbf{r_B} + (x\hat{i} + y\hat{j}) \tag{16}$$

Notera: här har jag ersatt $\mathbf{r_{A/B}}$ från tidigare med $\mathbf{r}$ för att göra alla ekvationer mindre plottriga. Detta kommer vara konventionen från och med nu. Här är $\hat{i}$ och $\hat{j}$ enhetsvektorer i det rörliga koordinatsystem vi fäst i punkt B. För att få ut hastighet och ekvation i xy-systemet behöver vi tidsderivera (16). Vi kan dock inte derivera rakt av längre, eftersom våra enhetsvektorer ändras med tiden!

3.5. Tidsderivera enhetsvektorer

Eftersom enhetsvektorerena $\hat{i}$ och $\hat{j}$ roterar med xy-axlarna kommer de ha tidsderivator som vi måste beräkna. Detta är obehagligt nog ett grafiskt bevis, som jag inte orkar Texa just nu (finns på sidan 385 i Dynamics-boken). Resultatet blir:

Texa bevis

$$\dot{\hat{i}} = \overrightarrow{\omega} \times \hat{i} \tag{17}$$
$$\dot{\hat{j}} = \overrightarrow{\omega} \times \hat{j} \tag{18}$$

3.5.1. Relativ hastighet

Med uttrycken i (17) och (18) kan vi nu fortsätta derivera vårt vektoruttryck från (16) med hjälp av produktregeln:

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j}) = \dot{\mathbf{r}}_B + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}}) + (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) \tag{19}$$

Vi noterar att:

$$x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} = \overrightarrow{\omega} \times x\hat{i} + \overrightarrow{\omega} \times y\hat{j} = \overrightarrow{\omega} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r} \tag{20}$$

Den sista termen $(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})$ är den hastighet som uppmäts i det rörliga xy-systemet, som vi nu kallar den relativa hastigheten:

$$(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) \equiv \mathbf{v_{rel}} \tag{21}$$

Detta är hastigheten som A har relativt B. Med (20) och (21) förenklas uttrycket (19) nu till:

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v_{rel}} \tag{22}$$

Notera: Om vi jämför detta yttryck med (9) från tidigare, så ser vi att:

$$\mathbf{v_{A/B}} = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v_{rel}}$$

Så vi uppmäter alltså en skillnad i de relativa hastigheterna för ett roterande och ickeroterande koordinatsystem!

3.5.2. Transformera tidsderivata till andra koordinater

Vi har funnit en generell regel för att uttrycka en tidsderivata av en godtycklig vektor i ett roterande koordinatsystem. Om $\mathbf{V}$ är en vektor som bor i det statiska XY-planet, kan vi yttrycka dess derivata i ett roterande xy-plan enligt:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XY} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xy} + \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{V} \tag{23}$$

Detta kommer visa sig gälla även i tre dimensioner.

3.5.3. Relativ acceleration

Vi får ut den relativa accelerationen genom att tidsderivera den relativa hastigheten i (22):

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_B} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \mathbf{r} + \overrightarrow{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}}_{rel} \tag{24}$$

Med (23) får vi:

$$\overrightarrow{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v_{rel}}) = \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}) + \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v_{rel}}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{rel} = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v_{rel}} + \mathbf{a_{rel}}$$

Substitution ger nu ett fullständigt uttryck för partikel A:s totala acceleration $\mathbf{a_A}$:

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_B} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \mathbf{r} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v_{rel}} + \mathbf{a_{rel}} \tag{25}$$

Här kan vi tolka de olika termerna och dess fysikaliska innebörd:

- $\mathbf{a_B}$ är accelerationen hos punkt B, som är origo för det roterande koordinatsystemet.
- $\dot{\overrightarrow{\omega}} \times \mathbf{r}$ är accelerationen tangentiellt cirkelbanan. Blir noll om ω är konstant.
- $\overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r})$ är centripetalacceleration. Den ger en ändring i riktning hos $\mathbf{v}$ för att hålla punkt A kvar i en roterande bana. Ger upphov till en fiktiv kraft. Notera att detta är en normalkraft, men att normalkraften kan uträtta arbete i roterande system!
- $2\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v_{rel}}$ är Coriolisaccelerationen, som vi pratar mer om strax.
- $\mathbf{a_{rel}}$ är radiell acceleration, som upplevs även inuti systemet. Visar A:s ändring i fart relativt B.

3.5.4. Coriolisacceleration

Termen $2\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v_{rel}}$ kallas *Coriolisaccelerationen*. Denna acceleration uppkommer bara om vi rör oss i ett roterande koordinatsystem, och i vardagliga situationer är dess effekter inte så märkbara. Coriolisaccelerationen har två komponenter: en som kommer från ändring i radie och en från ändring i vinkel.

Ta med bevis på detta från boken! S. 389

Snurrande skiva fäst i origo (stationärt). Konstant $\overrightarrow{\omega}$, $\mathbf{v_{rel}}$.

$\dot{x}d\theta$ från riktningsändring hos $\mathbf{v}$, den får ju en extra hastighet i y-led pga rotation.

ωdx från ändring i radie. Vi snurrar ju snabbare i takt med att vi rör oss längre ut från origo!

så: $dv = \dot{x}d\theta + \omega dx$ $\frac{dv}{dt} = \dot{x}\frac{d\theta}{dt} + \omega\frac{dx}{dt}$ $a = v_{rel}\omega + \omega v_{rel}$

Sätt in i (25) och kolla vad som händer. Bara två termer blir kvar! Notera att $\mathbf{a_{rel}}$ endast är noll om skåran är rak, annars har vi en acceleration relativt origo.

sample problem 5.16, s 391

3.6. Sammanfattning

Här har vi lärt oss om plan rörelse för stelkroppar. Dessa problem går att lösa på två olika sätt.

1: Analys av absolut rörelse Vi ställer först upp en ekvation som beskriver systemets geometri. Denna tidsderiveras sedan för att få ut hastighet och acceleration.

2: Analys av relativ rörelse Relativ rörelse låter oss lösa många problem som är för krångliga för att lösa genom att ställa upp en vektor och derivera den. Fortfarande i ett stationärt koordinatsystem, så behandlade vi hur en punkt roterar kring en annan och ställde upp ekvationer för relativ hastighet och acceleration.

Roterande koordinatsystem Till sist kom vi till kapitlets höjdpunkt, roterande koordinatsystem. Jag vill hävda att alla MekII-problem vi kan lösa med absolut eller relativ rörelse, kan också lösas med roterande koordinater. Värt att påpeka är att detta alltså verkar vara ett fundamentalt annorlunda tillvägagångssätt än relativ rörelse, jag får nog kolla på det där igen. kolla på det

Roterande basvektorer låter oss observera rörelse relativt en roterande referensram. Enhetsvektorerna själva har här en tidsderivata, det gäller att ha koll på det.

4. Plan kinetik för stelkroppar

Till att börja med, vad är skillnaden på kinetik och kinematik? Inom kinetik tar vi ett steg närmre verkligheten och måste nu, till exempel, behandla massan hos komponenterna i våra system. Målet är att beskriva yttre krafter som verkar på en kropp och studera hur kroppen som följd kan translatera och rotera.

En godtycklig kropp kan här approximeras med en tunn skiva, vars masscentrum ligger i rörelseplanet. Alla krafter som verkar på kroppen kommer också projiceras på rörelseplanet. En kropp som har en definitiv utsträckning utanför rörelseplanet, men är symmetrisk med avseende på planet, kan också ses som att den har plan rörelse. Detta kapitel låter oss alltså behandla en stor andel av stelkroppsproblem.

4.1. Del A: Kraft, massa och acceleration

För en generell stelkropp i tre dimensioner, är kraftresultanten

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{26}$$

där $\bar{\mathbf{a}}$ är accelerationen för masscentrum G. Det gäller också att:

$$\sum \mathbf{M_G} = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{27}$$

Där M_G är det resulterande kraftmomentet kring masscentrum av externa krafter som verkar på kroppen. H_G är rörelsemängdsmoment. För en godtycklig kropp som påverkas av godtyckliga krafter, kan vi skriva om dessa som EN resulterande kraft och ETT resulterande moment.

Betrakta en stelkropp, med acceleration $\bar{\mathbf{a}}$, vinkelhastighet $\overrightarrow{\omega} = \omega\hat{k}$, vinkelacceleration $\overrightarrow{\alpha} = \alpha\hat{k}$. Per definition så har vi att:

$$\mathbf{H_G} = \sum_i \mathbf{r_i} \times m_i \dot{\mathbf{r_i}} \tag{28}$$

Här är $\mathbf{r_i}$ positionsvektorn från masscentrum till partikeln (eller volymselementet) med massa m_i. $\dot{\mathbf{r_i}} = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r_i}$ ligger i vårt tvådimensionella rörelseplan och är normal mot $\mathbf{r_i}$. Detta ger:

$$H_G = \omega \sum_i r_i^2 m_i \tag{29}$$

Summan ger ett viktat uttryck för hur massan är fördelad kring tyngdpunkten. Detta kommer bland annat påverka hur trögt det är att sätta snurr på kroppen.

$$\bar{I} = \sum_i r_i^2 m_i = \int r^2 dm \tag{30}$$

I kallas tröghetsmoment och är en fysikalisk egenskap hos stelkroppen, precis som dess massa. Vi kan nu skriva om

$$H_G = \bar{I}\omega$$

$$\implies \sum M_G = \dot{H}_G = \bar{I}\alpha \tag{31}$$

Det verkar som att H, M skrivs som skalärer här för att vi vet med oss att ω, α alltid pekar i samma riktning. Vi kan nu beskriva generell rörelse för en stelkropp i plan rörelse!

Värt att påpeka att inga kraftmoment M_G uppkommer från interna krafter, då dessa alltid kommer ha en motverkande kraft av samma storlek. Bara yttre krafter blir kvar!

4.1.1. Alternativa momentekvationer

Vi har en generell formel för moment kring en godtycklig punkt P (från kapitel 4 i boken, tror det ingår i Mek1?): kolla upp

$$\sum \mathbf{M_P} = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r_{G/P}} \times m\bar{\mathbf{a}} \tag{32}$$

Här är vektorn $r_{G/P}$ vektorn från punkt P till masscentrum G. Om punkt P är *på stelkroppen* kan vi alternativt skriva:

$$\sum \mathbf{M_P} = \dot{\mathbf{H}}_P + \mathbf{r_{G/P}} \times m\mathbf{a_P} \tag{33}$$

Här är $\dot{\mathbf{H}}_\mathbf{P} = I_P \overrightarrow{\alpha}$, där I_P är tröghetsmomentet kring punkten P istället! Notera att α inte ändras här - alla punkter på stelkroppen upplever ju samma rotationsrörelse även om de har olika rotationshastiget. Då får vi slutligen:

$$\sum \mathbf{M_P} = I_P \overrightarrow{\alpha} + \mathbf{r_{G/P}} \times m\mathbf{a_P} \tag{34}$$

Men hur beräknar vi tröghetsmoment kring en annan punkt än masscentrum? Till vår hjälp har vi den otroligt användbara **Steiners sats**, också känd som parallellaxelteoremet:

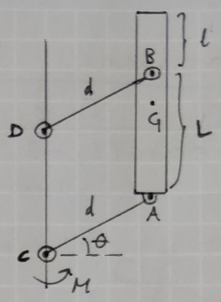
$$I_P = I_G + md^2 = \bar{I} + md^2 \tag{35}$$

Här är d avståndet mellan masscentrum G och den godtyckliga punkten P. m är helt enkelt stelkroppens massa. Vi kan nu beräkna tröghetsmomentet kring en godtycklig punkt P genom att först beräkna I_G och lägga till en avståndsberoende term. Notera att I_G är det minsta möjliga tröghetsmomentet för en kropp! Det är alltså alltid lättast att rotera kring masscentrum. tabell med I-värden

4.1.2. Kopplad rörelse

Om rörelsen inte är helt fri, utan $a_{G,x}$ och $a_{G,y}$ är kopplade, delar vi upp problemet i två delar: accelerationen hos masscentrum och vinkelacceleration runt masscentrum. Dessa relateras sedan. Om vi har fler okända än ekvationer kan vi behöva ta till Lagrangemekanik för att lösa det (se analytisk mekanik-delen av kursen).

Sample problem 6/2



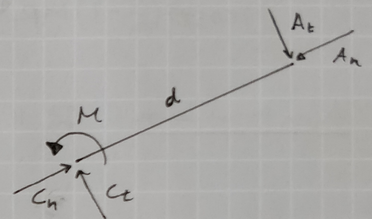
massa m, G ligger mitt emellan ändpunkterna.

Konstant moment M vid C.

(1) Bestäm $\alpha = \alpha(\theta)$

Eftersom själva stången inte roterar, kommer G röra sig i en halvcirkelbana. Vi väljer därför att arbeta med polära koordinater. $(n-t)$

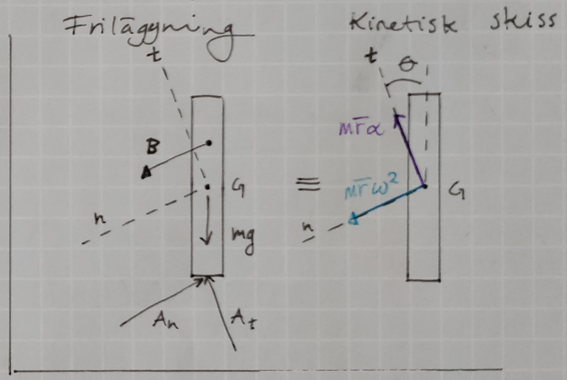
Frilägg stödstången AC:



$$\boxed{A_t \cdot d = M}$$

$$\sum_i M_c \cong 0$$

Kraften i B är längs med länken BD!



I friläggningen av stången ser vi alla pålagda krafter.

$$\sum \vec{F} = m\vec{\bar{a}}$$

masscentrums acceleration $\bar{a}$ har två komponenter, en normal och en tangentiell – som i förra kapitlet! Dessa syns till höger.

Minns att det är α vi är intresserade av.

$\sum_i F_t = m\bar{a}_t$ resulterande tangentiell acceleration

$$A_t - mg\cos\theta = ma = m(d\alpha)$$

$$M/d - mg\cos\theta = md\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{M}{md^2} - \frac{g}{d}\cos\theta$$

4.1.3. Translation

Eftersom ren translation är ett specialfall av generell rörelse, gäller (26) och (31) och vi får helt enkelt sätta $\omega = \alpha = 0$. Boken snackar en del om detta men jag tycker det borde vara trivialt.

4.1.4. Rotation kring fix axel

Vi har redan diskuterat rotation kring en fix axel i förra kapitlet. Även här gäller gäller (26) och (31), och det kan vara fördelaktigt att studera kraftresultanterna normalt och tangentiellt rörelsebanan:

Har vi verkligen? Var?

$$\sum F_t = mr_G\alpha \tag{36}$$

$$\sum F_n = mr_G\omega^2 \tag{37}$$

En realistisk kropp som roterar kring en axel kommer utsättas för en kraft från fästpunkten. I momentekvationen kring G måste vi ta hänsyn till momentet från denna kraft! Eftersom kraften ofta är okänd är det fördelaktigt att beräkna momentet kring fästpunkten (då har kraften ingen hävarm och ger inget moment). Vi använder (34) och sätter $a_P = 0$ då fästpunkten inte rör sig:

Lägg in bild, s. 431

$$\sum M_P = I_P\alpha \tag{38}$$

Om en kropp roterar kring en fix axel genom sitt eget masscentrum blir $a_G \equiv 0$. Så alla eventuella krafter som verkar på kroppen kommer endast resultera i ett kraftmoment $\bar{I}\alpha$.

Sample problem 6/4 sida 433

Missade ekvation 6/2, den är viktig

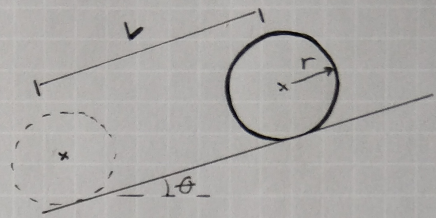
4.1.5. Generell plan rörelse

Vi har nu (26) och (31) till vår hjälp för att beskriva generell plan rörelse. Värt att tänka på när man löser uppgifter:

- Uttryck kraftresultanten i det koordinatsystem som bäst beskriver accelerationen hos masscentrum. Kartesiska eller polära?
- Det kan ibland vara enklast att använda (34) för att beräkna moment kring en punkt vars acceleration är känd.
- För att kunna avgöra inverkan från yttre krafter måste vi först tydligt välja vilken del systemet som ska friläggas, och vilka krafter som finns.

Sample problem 6/5

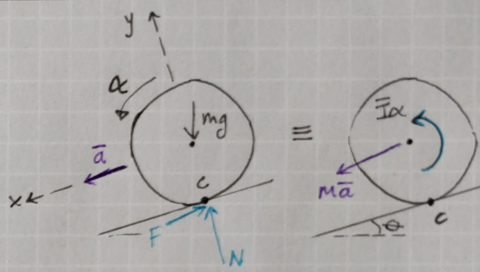
Metallring med radie r släpps från vila på rampen.



Har givet statiska och kinetiska friktions-koeficienterna μ_s, μ_k

Bestäm vinkelaccelation α samt tiden t innan ringen färdats sträckan L nedför rampen.

Lösning



Friläggningen visar N (normalkraft) och F (friktionskraft) som verkar i kontaktpunkten c.

I det ekvivalenta kinetiska ser vi den resulterande kraften och momentet.

Vi antar att ringen rullar utan att glida, så $\boxed{\bar{a} = r\alpha}$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \rightarrow mg\sin\theta - F = m\bar{a}$$
$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0 \rightarrow N - mg\cos\theta = 0$$
$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha \rightarrow Fr = \bar{I}\alpha = mr^2\alpha$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \frac{g}{2}\sin\theta \qquad \boxed{\alpha = \frac{\bar{a}}{r} = \frac{g\sin\theta}{2r}}$$

Vi vill nu kolla om antagandet om inget glidande stämmer!

Den maximala friktionskraften $F_{max} = \mu_s N = \mu_s \cdot mg\cos\theta$

om $F > F_{max}$, så glider ringen medan den rullar!

I så fall är $\bar{a} \neq r\alpha$, och vi använder $F = \mu_k N$

Ekvationen från ovan blir då

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \rightarrow mg\sin\theta - \mu_k N = m\bar{a}$$

$$\cancel{m}g\sin\theta - \mu_k \cdot \cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}\bar{a} \rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha \rightarrow F \cdot r = mr^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{mr} = \frac{\mu_k mg\cos\theta}{mr}$$

Om ringen glider fås alltså $\boxed{\alpha = \frac{\mu_k g\cos\theta}{r}}$

med konstant acceleration kan vi beräkna tiden t:

$$L = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{\bar{a}}}$$

Svar: om ringen glider är $\alpha = \frac{\mu_k g\cos\theta}{r}$

annars är $\alpha = \frac{g\sin\theta}{2r}$

4.2. Del B: Arbete och energi

Arbets-och energiprinciperna är användbara när vi studerar den kumulativa effekten från en kraft över tid. Med konservativa krafter kan vi också lösa ut hastighetsändringar ut ändringar i energi.

Över begränsade sträckor kan vi därmed komma undan att bestämma accelerationen och sedan integrera.

4.2.1. Arbete från krafter och kraftpar

Arbetet U som en kraft F utför ges av:

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{39}$$

Vad händer om ett kraftpar M verkar på en kropp? De kommer inte ge upphov till någon translation eftersom de är motriktade och av samma storlek. Det totala arbetet de utför blir då ett rotationsarbete:

$$U = \int M d\theta \tag{40}$$

4.2.2. Kinetisk energi

Vi vill också kunna uttrycka den kinetiska energin hos vår stelkropp. En translaterande partikel i har kinetisk energi $T_i = \frac{1}{2} m_i v^2$. För att beräkna rotationsenergi låter vi istället partikeln följa en cirkelbana runt G med vinkelhastighet ω. Med samma resonemang som innan blir den kinetiska energin $T_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega_i)^2$. För en sammansatt kropp som translaterar och roterar blir den totala kinetiska energin då:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_i m_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 \tag{41}$$

Här noteras att $\sum_i m_i \equiv m$, samt att $\sum_i m_i r_i^2 \equiv \bar{I}$. Så generellt får vi:

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \tag{42}$$

4.2.3. Potentiell Energi och Arbete-Energiekvationen

Ifall krafter verkar på en kropp över tid, så ändras dess kinetiska energi enligt:

$$T_1 + U_{1-2} = T_2 \tag{43}$$

Där U_{1-2} är arbetet som utförs av alla externa krafter. Vi kan också välja att inkludera potentiell energi V (lägesenergi och/eller energi lagrad i fjädrar):

$$T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2 \tag{44}$$

U_{1-2} betecknar arbete utfört av alla krafter förutom tyngd- och fjäderkrafter. Dem tar vi ju redan hänsyn till i V! Denna ekvation kanske blir mer relevant i kapitel 8, när vi kollar på fjädrar och sånt.

4.2.4. Effekt

En kraft $\mathbf{F}$ som verkar på en stel kropp i plan rörelse ger den instantana effekten P:

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{45}$$

$d\mathbf{r}$ är förflyttningen och $\mathbf{v}$ hastigheten hos kraftens angreppspunkt. Om vi istället har ett kraftpar M som verkar på kroppen blir effekten:

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{Md\theta}{dt} = M\omega \tag{46}$$

Där $d\theta$ är kroppens vinkelförflyttning och ω dess vinkelhastighet. Om M och ω motverkar varandra kommer vi få en negativ effekt, och energi förs bort från kroppen. Om vi har både en kraft **F** och ett kraftpar M som verkar samtidigt blir den totala effekten:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + M\omega \tag{47}$$

Sample problem 6/9, p 464

4.3. Del C: Impuls och moment

Detta är viktiga koncept när vi kan uttrycka krafter som funktion av tiden, och under stötförlopp.

4.3.1. Moment G

Momentet för en kropp, stel eller inte, får vi genom:

$$\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}} \tag{48}$$

Relationen mellan kraftresultanten och momentet blir då

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{G}} \tag{49}$$

Om vi vill studera hur momentet för en kropp ändras med tiden, som under ett stötförlopp, kan vi skriva:

$$\mathbf{G_1} + \int_{t1}^{t2} \sum \mathbf{F} dt = \mathbf{G_2} \tag{50}$$

Vi kommer alltså addera den linjära impulsen från kraftresultanten till kroppens moment, under tiden kraften är verksam. Det är viktigt att räkna med *alla* krafter som verkar på kroppen vi undersöker! Alla krafter kan ge en impuls, oavsett om de uträttar arbete eller inte.

4.3.2. Rörelsemängdsmoment H

Rörelsemängdsmoment defineras (tyvärr) som ”momentet av linjärt moment”. Trots denna luddiga fysikaliska motivering kommer vi behöva räkna på eländet. RMM kring masscentrum definieras genom:

$$\mathbf{H_G} = \bar{I}\overrightarrow{\omega} \tag{51}$$

För tvådimensionell rörelse med $\overrightarrow{\omega} \equiv \omega\hat{k}$ kommer rörelsemängdsmomentsvektorn H alltid vara vinkelrät mot rörelseplanet. Boken gillar därför att använda skalärnotation i detta kapitel. Vi går dock direkt på de riktiga ekvationerna:

$$\sum \mathbf{M_G} = \bar{I}\overrightarrow{\alpha} \equiv \dot{\mathbf{H}}_G \tag{52}$$

$$\mathbf{H_G}_1 + \int_{t1}^{t2} \sum \mathbf{M_G} dt = \mathbf{H_G}_2 \tag{53}$$

Viktigt att klart fastställa positiv rotationsriktning och hålla sig till denna! För rörelsemängdsmomentet kring en godtycklig punkt O får vi:

$$H_O = \bar{I}\omega + Gd = \bar{I}\omega + m\bar{v}d \tag{54}$$

där d är den vinkelräta hävarmen från O till verkningslinjen för momentet **G**. Notera här att O kan vara en rörlig punkt!

går säkert att uttrycka med kryssprodukt

fig 6/14 s 488 - ta med?

Om O är en fix punkt kan vi använda $\bar{v} = \bar{r}\omega$ och $d = \bar{r}$ för att skriva:

$$H_O = \bar{I}\omega + m\bar{r}^2\omega \equiv I_O\omega \tag{55}$$

4.3.3. Kopplade stelkroppar

För två kopplade stelkroppar a och b, med ett fixt origo O för hela systemet, får vi:

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}_a + \dot{\mathbf{G}}_b \tag{56}$$

$$\sum \mathbf{M_O} = \dot{\mathbf{H}}_{Oa} + \dot{\mathbf{H}}_{Ob} \tag{57}$$

I integrerad form över ett specifikt tidsintervall får vi:

$$\int_{t1}^{t2} \sum \mathbf{F} dt = (\Delta \mathbf{G})_{system} \tag{58}$$

$$\int_{t1}^{t2} \sum \mathbf{M_O} dt = (\Delta \mathbf{H_O})_{system} \tag{59}$$

De likstora och motriktade krafterna i kopplingspunkten är interna och kommer ta ut varandra. De behöver alltså inte tas med i kraft- och momentresultaten.

4.3.4. Momentbevaring

Om det inte finns några yttre krafter (kraftresultanter) så är momentet bevarat, det vill säga

$$\sum \mathbf{F} = 0 \implies \mathbf{G_1} = \mathbf{G_2} \tag{60}$$

För ett sammansatt system kan de olika komponenterna ha en ändring i moment. Systemets totala moment ändras dock inte ifall det inte finns någon resulterande kraft.

4.3.5. Bevaring av rörelsemängdsmoment

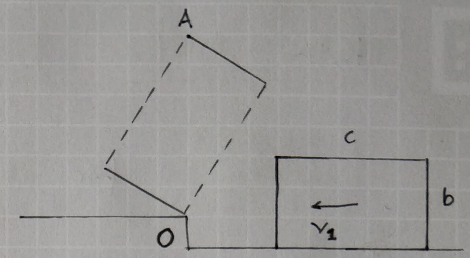
Om det inte finns något yttre moment (resulterande moment) kring en punkt under ett visst tidsintervall, så är rörelsemängdsmomentet H bevarat kring den punkten:

$$\sum \mathbf{M} = 0 \implies \mathbf{H_1} = \mathbf{H_2} \tag{61}$$

Punkten i fråga kan till exempel vara kroppens masscentrum eller en kontaktpunkt.

Sample problem 6/16

Det rektangulära blocket glider med hastighet v_1 och träffar det lilla steget O. Bestäm v_1 så att blocket precis når jämviktsläget A och stannar där. Blocket studsar inte mot steget!



Vi delar upp förloppet i två delar: kollision och rotation.

(I) Kollision – antag att stöten sker under ett mycket kort tidsintervall $\Delta t \approx 0$. En impulsiv kraft verkar under ett infinitisemalt tidsintervall – tyngdkraften är ickeimpulsiv, så den ger inget moment under stöten.

→ Rörelsemängdsmomentet H_0 bevaras! Precis innan stöten är RMM H_{01} "momentet av momentet kring O"

$$H_{01} = mv_1 \cdot \frac{b}{2}$$

Precis efter stöten, när blocket börjar snurra, får vi

$$H_{02} = I_0 \omega = \left\{ \text{Steiners: } I_0 = \bar{I} + m\bar{r}^2 \right\} = \omega \left[\frac{1}{12} m(b^2+c^2) + m\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] \right]$$

$$= \omega m \left[\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12} + \frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right] = \frac{\omega m}{3} \left[b^2 + c^2 \right]$$

Bevarande av rörelsemängdsmoment ger: $H_a = H_{02}$

$$\rightarrow m v_1 \cdot \frac{b}{2} = \frac{\omega m}{3} \left[b^2 + c^2 \right] \Rightarrow \omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_1 b}{b^2 + c^2}$$

(II) Rotation kring O – vi ser detta som rotation kring en punkt på marknivå ($0 \ll c, b$). Försumma friktion. I så fall kan vi se blocket som ett isolerat system → Den totala mekaniska energin bevaras!

$[T_2 + V_2 = T_3 + V_3]$

- $T_2 = \cancel{\frac{1}{2} m v^2} + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$ endast rotation
- $V_2 = mgh = mg\frac{b}{2}$ sätter nollnivå på marken
- $T_3 = 0$, ty blocket står helt stilla vid förloppets slut.
- $V_3 = mgh = mg \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$ minns: höjden av steget ≈ 0

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + mg\frac{b}{2} = mg\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3}(b^2+c^2)\left[\frac{3}{2} \frac{v_1 b}{b^2+c^2} \right]^2 = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{b^2+c^2} - b \right)$$

$$\Rightarrow v_1 = 2\sqrt{\frac{g}{3}\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\sqrt{b^2+c^2} - b\right)}$$

4.4. Sammanfattning

Värt att tänka på: Om rörelse sker över en viss sträcka använder vi arbete och energi. Den slutliga hastigheten kan beräknas utan att räkna ut accelerationen. Om rörelsen istället är en funktion av tid bör vi använda impulsmoment-approachen. När vinkelhastigheten hos en stelkropp ändras så *kan* RMM vara konserverad.

Linjär rörelse:

- Rörelsemängd $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$
- Kraft $\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} = m\dot{\bar{\mathbf{v}}}$
- $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}$

Roterande rörelse: Se stelkroppen som en massa små punkter med sin egen ortsvektor och massa.

- Rörelsemängdsmoment (RMM) $\mathbf{H} = \bar{I}\overrightarrow{\omega}$
- Vridmoment (kraftmoment) $\mathbf{M} = \bar{I}\overrightarrow{\alpha}$
- $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$ - härledning av denna relation finns i appendix A.

5. Introduktion till tredimensionell stelkroppsrörelse

En stor andel av mekaniska problem kan beskrivas med plan rörelse, men ibland är det nödvändigt att krångla till det med en ytterligare dimension. Här är det bra att vi kan linjär algebra! Som tidigare kommer vi först gå igenom den nödvändiga kinematiken (där vi bortser från massa och tröghet), och sedan gå på kinetik (där vi behandlar mer applicerade problem).

5.1. Kinematik

5.1.1. Translation

För en stelkropp som translaterar i tre dimensioner, gäller för två godtyckliga punkter A och B

$$\mathbf{r_A} = \mathbf{r_B} + \mathbf{r_{A/B}}$$

Eftersom kroppen inte ändrar orientering kommer $\mathbf{r_{A/B}}$ vara konstant. Vi får då

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} \qquad \mathbf{a_A} = \mathbf{a_B}$$

Det vill säga, alla punkter på kroppen upplever samma hastighet och acceleration. Detta resultat är inte så intressant och vi behöver inte undersöka det vidare.

5.1.2. Rotation kring en fix axel

Låt nu istället stelkroppen rotera kring en fix rymdaxel A med vinkelhastighet $\vec{\omega}$. Vi definierar $\vec{\omega}$ att ligga i samma riktning som rotationsaxeln, och dess tecken fås från högerhandsregeln. För smidighetens skull kan vi välja vårt origo på rotationsaxeln. En godtycklig punkt B på kroppen kommer följa en cirkelbana i ett plan normalt mot A. Precis som tidigare ges hastigheten av

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r} \tag{62}$$

Och accelerationen

$$\mathbf{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{63}$$

För cirkelrörelsen runt A kommer de normala och tangentiella komponenterna av B:s acceleration bli $a_n = |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})| = r_{B/A}\omega^2$, $a_t = |\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}| = r_{B/A}\alpha$.

bild 7/2, s. 515

5.1.3. Planparallell rörelse

När alla punkter i en stelkropp rör sig parallellt ett fixt rymdplan P, har vi en form av generaliserad plan rörelse. Man brukar välja detta *rörelseplan* att gå genom masscentrum. Eftersom alla punkter rör sig identiskt med en motsvarande punkt i planet, kan vi använda det vi lärde oss i kapitel 3.

5.1.4. Rotation kring en fix punkt

När en kropp roterar kring en fix punkt i rymden kommer $\vec{\omega}$ inte längre ha en konstant riktning. Vi måste alltså utveckla en mer generell beskrivning av rotation.

Addera rotationsvektorer Vi kan vilja beskriva rotation kring flera axlar. När kan vi behandla rotationsvektorer som "riktiga" vektorer och addera dem? Om vi roterar en kropp först kring x-axeln och sedan kring y-axeln, kommer den hamna i en viss position. Roterar vi istället först kring y-axeln och sedan kring x-axeln behöver kroppen inte nödvändigtvis ha samma slutliga orientering. Man kan visa att vi kan addera vinkelhastigheter som riktiga vektorer:

kanske förklara detta bättre, om jag

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} = \vec{\omega_1} + \vec{\omega_2}$$

Instantan rotationsaxel och rymdkoner

kanske sen

Vinkelacceleration I vektorform ger $\vec{\alpha}$ både ändringen i storlek och riktning för $\vec{\omega}$. När magnituden av $\vec{\omega}$ är konstant, gäller att $\vec{\alpha} \perp \vec{\omega}$. Om $\vec{\omega}$ också roterar (*precesserar*) kring en axel, som vi betecknar $\vec{\Omega}$, gäller

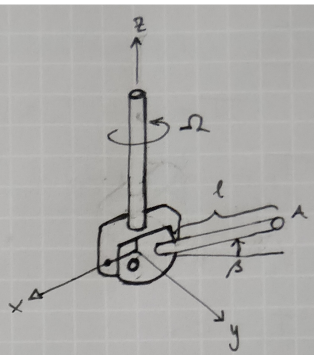
$$\vec{\alpha} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} \tag{64}$$

fig 7/9 s. 517

Precis som i fallet med rotation kring en fix axel gäller (62) och (63). När en kropp roterar kring en fix punkt kommer $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$ ha en komponent parallellt $\vec{\omega}$ (från eventuell ändring i magnitud) och en ny komponent normalt $\vec{\omega}$ (från vinkelhastihgetens ändring i riktning).

Sample problem 7/1

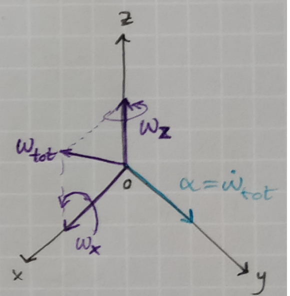
Lite kladdig bild denna gång!



Armen OA har längd l. Den kan rotera kring den horisontella x-axeln, och roterar kring z med en konstant vinkelhastighet Ω. Rotationen kring x är β.

a) Bestäm den totala vinkelhastigheten för armen.
b) Bestäm armens vinkelacceleration
c) Bestäm hastigheten för punkt A
d) Bestäm accelerationen för punkt A

e) Om origo O rörde sig linjärt, skulle det påverka armens vinkelhastighet eller vinkelacceleration?



a) Armen snurrar runt både x- och z-axeln.

$$\vec{\omega}_{tot} = \dot{\beta}\hat{i} + \Omega\hat{k}$$

b) Vinkelaccelerationen är $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}_{tot} = \dot{\vec{\omega}}_x + \dot{\vec{\omega}}_z$

$\vec{\omega}_z$ har konstant magnitud och riktning, så $\dot{\vec{\omega}}_z = 0$. $\vec{\omega}_x$ ändrar riktning!

$$\Longrightarrow \vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}_x = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_x = \Omega\hat{k} \times \dot{\beta}\hat{i} = \Omega\dot{\beta}\hat{j}$$

c) A har $\vec{r}_A = l\cos\beta\,\hat{j} + l\sin\beta\,\hat{k}$ $\qquad \omega_x = \dot{\beta}$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{tot} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{\beta} & 0 & \Omega \\ 0 & l\cos\beta & l\sin\beta \end{vmatrix} = -\Omega l\cos\beta\,\hat{i} - \dot{\beta} l\sin\beta\,\hat{j} + \dot{\beta} l\cos\beta\,\hat{k}$$

d) Accelerationen för punkt A blir

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{\omega}}_{tot} \times \vec{r}_A + \vec{\omega}_{tot} \times (\vec{\omega}_{tot} \times \vec{r}_A) = \vec{\alpha} \times \vec{r}_A + \vec{\omega}_{tot} \times \vec{v}_A$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \Omega\dot{\beta} & 0 \\ 0 & l\cos\beta & l\sin\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{\beta} & 0 & \Omega \\ -\Omega l\cos\beta & -\dot{\beta} l\sin\beta & \dot{\beta} l\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(\Omega\dot{\beta} l\sin\beta + \Omega\dot{\beta} l\sin\beta) - \hat{j}(\Omega^2 l\cos\beta) - \hat{k}(\dot{\beta}^2 l\sin\beta)$$

$$= \hat{i} \cdot 2\Omega\dot{\beta} l\sin\beta - \hat{j} \cdot \Omega^2 l\cos\beta - \hat{k} \cdot \dot{\beta}^2 l\sin\beta$$

e) Vinkelrörelsen hos OA beror bara på $\Omega, \dot{\beta}$. $\vec{\omega}_{tot}$ och $\vec{\alpha}$ skulle inte påverkas om O translaterar.

5.1.5. Generell rörelse

Här återkommer vi till relativ rörelse igen, med både translaterande och roterande axlar.

Translaterande referensaxlar För en godtycklig kropp som har en vinkelhastighet $\vec{\omega}$ kan vi välja en lämplig punkt B som origo för ett translaterande koordinatsystem x-y-z. Precis som i 3 fås den relativa hastigheten och accelerationen för en annan punkt A genom

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \mathbf{v_{A/B}}$$
$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_B} + \mathbf{a_{A/B}}$$

Vi ser den generella rörelsen som translationen hos B plus kroppens rotation kring B. Detta ger samma uttryck för relativ hastighet och acceleration som vi härledde i 3:

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \vec{\omega} \times \mathbf{r_{A/B}}$$
$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_B} + \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r_{A/B}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r_{A/B}})$$

Här är $\vec{\omega}$ kroppens instantana vinkelhastighet - dess storlek och riktning kan ändras med tiden. Vi kommer se att brukar vara bra att använda masscentrum som referenspunkt B.

Roterande referensaxlar Mer generellt kan vi vilja använda axlar som translaterar och roterar. z-y-z-koordinaterna med origo i B kommer nu att rotera med en vinkelhastighet $\vec{\Omega}$, som generellt är annorlunda från kroppens egen vinkelhastighet $\vec{\omega}$. Tidsderivatan av de roterande enhetsvektorerna blir

$$\dot{\hat{i}} = \vec{\Omega} \times \hat{i} \qquad \dot{\hat{j}} = \vec{\Omega} \times \hat{j} \qquad \dot{\hat{k}} = \vec{\Omega} \times \hat{k}$$

Uttrycken för hastigheten och accelerationen hos punkt A blir

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \vec{\Omega} \times \mathbf{r_{A/B}} + \mathbf{v_{rel}}$$
$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_B} + \dot{\vec{\Omega}} \times \mathbf{r_{A/B}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r_{A/B}}) + 2\vec{\Omega} \times \mathbf{v_{rel}} + \mathbf{a_{rel}}$$

Här är $\mathbf{v_{rel}}$ och $\mathbf{a_{rel}}$ den hastighet respektive acceleration som uppmäts inuti x-y-z-systemet. Vi har här återigen använt vårt uttryck för tidsderivatan relativt ett roterande koordinatsystem:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \mathbf{V}$$

Detta gäller för ett fast koordinatsystem XYZ och ett xyz-system som roterar med vinkelhastighet Ω.

Sample problem 7/3, 7/4 s. 530

5.2. Kinetik

5.2.1. Rörelsemängdsmoment

I tre dimensioner har $\dot{\mathbf{H}}$ komponenter som inte kommer upp i plan rörelse. Momentekvationen blir därför krångligare. Vi studerar en stel kropp som beskriver generell rörelse i rummet, med xyz-axlar fästa i dess masscentrum G. Rörelsemängdsmomentet kring masscentrum är $\mathbf{H_G} = \sum_i (\mathbf{r_i} \times m_i \mathbf{v_i})$. Vi kan dela upp hastigheten enligt $\mathbf{v_i} = \bar{\mathbf{v}} + \vec{\omega} \times \mathbf{r_i}$ - här är den sista termen den hastighet punkten i har relativt G.

$$\mathbf{H_G} = \sum_i \mathbf{r_i} \times m_i(\bar{\mathbf{v}} + \vec{\omega} \times \mathbf{r_i}) = -\bar{\mathbf{v}} \times \sum_i (m_i \mathbf{r_i}) + \sum_i (\mathbf{r_i} \times m_i(\vec{\omega} \times \mathbf{r_i}))$$

Här har jag kastat om ordningen på kryssprodukten för att lättare se att den första termen i $\mathbf{H_G} \equiv 0$. $\sum_i (m_i \mathbf{r_i})$ är ju per definition noll kring kroppens masscentrum. Vi är nu redo att byta ut summor mot integraler, och får:

$$\mathbf{H_G} = \int \mathbf{r} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}) dm$$

Om kroppen roterar kring en fix punkt O visar det sig att $\mathbf{H_O} = \mathbf{H_G}$. Från och med nu kommer rörelsemängdsmomentet endast betecknas med $\mathbf{H}$ i vilket fall.

Tröghetsmoment

Vi minns att komponenterna av $\overrightarrow{\omega}$ är desamma över hela kroppen, och de kan därför brytas ut ur integralen. Det gäller också att $\mathbf{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Om man utvecklar trippelkryssprodukten kommer man till slut fram till

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} = \hat{\imath} &\left[+(y^2+z^2)\omega_x \quad -xy\omega_y \quad -xz\omega_z \right] dm \\ \hat{\jmath} &\left[-xy\omega_x \quad +(x^2+z^2)\omega_y \quad -yz\omega_z \right] dm \\ \hat{k} &\left[-xz\omega_x \quad -yz\omega_y \quad +(x^2+y^2)\omega_z \right] dm \end{aligned}$$

Vi kan identifiera termerna med

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2+z^2) dm \qquad & I_{xy} = I_{yx} &= -\int xy\ dm \\ I_{yy} &= \int (x^2+z^2) dm \qquad & I_{xz} = I_{zx} &= -\int xz\ dm \\ I_{zz} &= \int (x^2+y^2) dm \qquad & I_{yz} = I_{zy} &= -\int yz\ dm \end{aligned}$$

Eller, för ett system av partiklar (som vi ser som punktmassor):

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i m_i (y^2+z^2) \qquad & I_{xy} = I_{yx} &= -\sum_i m_i xy \\ I_{yy} &= \sum_i m_i (x^2+z^2) \qquad & I_{xz} = I_{zx} &= -\sum_i m_i xz \\ I_{zz} &= \sum_i m_i (x^2+y^2) \qquad & I_{yz} = I_{zy} &= -\sum_i m_i yz \end{aligned}$$

Lägg in Stellans läskiga formel här

Boken gillar att kalla I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} tröghetsmoment och $I_{xy}, I_{xz}, ...$ tröghetsprodukter. Med $\overrightarrow{\omega} = \hat{\imath}\omega_x + \hat{\jmath}\omega_y + \hat{k}\omega_z$ kan vi nu skriva vårt tidigare uttryck för rörelsemängdsmomentet på matrisform. Vi får $\mathbf{H} = \mathbf{I}\overrightarrow{\omega}$, med

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{65}$$

Notera att boken helt spårar ur här! De definierar de avdiagonala elementen i $\bar{\mathbf{I}}$ som negativa, och det gör att vi inte längre kan se den som en riktig matris. Vi kommer inte syssla med såna dumheter här. Jag vill se I_{xy} som ”trögheten i y-led när vi roterar kring x-axeln”. Därav symmetrin.

Nu har vi fått vårt uttryck för rörelsemängdsmomentet, antingen kring masscentrum eller kring en fix punkt O. Vi noterar att i båda dessa fall så är xyz-axlarna *fästa* i kroppen. Detta gör att alla tröghetsmomentsintegraler är tidsinvarianta, så vi faktiskt kan lösa dem! Om kroppen snurrar kring en symmetriaxel spelar dess rotation kring axeln ingen roll (den ser ju ändå likadan ut). Då kan man välja en axel längs rotationsaxeln och ha ett stationärt koordinatsystem.

ger detta något? får förklara mer isf

Huvudaxlar

Tröghetsmatrisen $\bar{\mathbf{I}}$ vi kom fram till i 65 beror på hur vi väljer vårt koordinatsystem relativt kroppen. Man kan visa att, för ett givet origo, det alltid finns ett unikt val av axlar som ger

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{66}$$

Det val av axlar som ger denna trevliga tröghetsmatris kallas huvudaxlar. De diagonala värden vi får fram kommer ge ett maximalt och ett minimalt värde för kroppens tröghetsmoment, och ett däremellan. Vi har ju hittat de axlar som kroppen är ”mest symmetrisk” runt. Som specialfall får vi allså att tröghetsmomentet kring huvudaxlarna blir:

$$\mathbf{H} = I_{xx}\omega_x\hat{i} + I_{yy}\omega_y\hat{j} + I_{zz}\omega_z\hat{k} \tag{67}$$

Även när kroppen roterar kring en huvudaxel eller när $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ kommer $\mathbf{H}$ och $\vec{\omega}$ ha olika riktningar. Trots att man alltid kan hitta huvudaxlar kan det vara geometriskt obehagligt att uttrycka tröghetsmomentet kring dessa axlar.

Överföring av rörelsemängdsmoment En kropps moment kan representeras med en resulterande momentvektor $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$ genom masscentrum och en resulterande rörelsemängdsmomentsvektor $\mathbf{H_G}$. Den senare är en fri vektor men det blir tydligt att rita den genom masscentrum. . Vi kan få rörelsemängdsmomentet för en godtycklig punkt P genom att lägga till rörelsemängdsmomentet från G i punkt P:

bild 7/13 s. 542

$$\mathbf{H_P} = \mathbf{H_G} + \mathbf{r_{G/P}} \times \mathbf{G} \tag{68}$$

Detta gäller för en punkt P på eller utanför kroppen.

5.2.2. Kinetisk energi

Den totala kinetiska energin för en stelkropp är

Varför inte I omega kvadrat?

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i|\dot{\mathbf{r}}_i|^2$$

Där $\bar{v}$ är masscentrums hastighet, och r_i är vektorn från masscentrum till en partikel med massan m_i. Den första termen är kinetisk energi från hela kroppens translation, och den andra termen är kinetisk energi från rotation kring masscentrum. Vi kan alternativt skriva om den första termen som

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G}$$

Eftersom $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$. Nu när vi rör oss i tre dimensioner är det smidigt att ha vektorformler för T, så vi vill också uttrycka den andra termen i form av vektorer. Vi använder att $\dot{\mathbf{r}}_i = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i$, där $\overrightarrow{\omega}$ är kroppens (instantana) vinkelhastighet. Då får vi:

$$\sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

Vi minns att man kan kasta om en trippel skalärprodukt enligt $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, så

$$(\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \overrightarrow{\omega} \cdot \mathbf{r_i} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

Eftersom $\overrightarrow{\omega}$ är samma i alla termer, kan vi bryta ut den ur summan ovan och får:

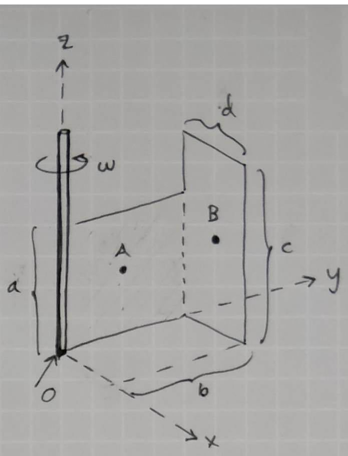
$$\sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \sum \mathbf{r_i} \times m_i (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r_i}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{H_G}$$

Per definitionen av $\mathbf{H_G}$ från början av förra avsnittet. Vårt vektoruttryck för den totala kinetiska energin hos en stel kropp blir alltså:

$$T = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{H_G} \tag{69}$$

Sample problem 7/6

Den böjda metallbiten har densitet ρ [kg/m²], och roterar kring z-axeln med konstant ω.



ⓐ Bestäm $\vec{H}_o$ för metallbiten

Till vår hjälp har vi dessa formler

$$\begin{cases} I = \bar{I} + md^2 \\ I_{ij} = \bar{I}_{ij} + m d_i d_j \end{cases}$$

$$m_A = \rho \cdot ab, \quad m_B = \rho \cdot cd$$

Del A

$$[I_{xx} = \bar{I}_{xx} + md^2_{G/x}] \rightarrow I_{xx} = \frac{1}{12} m_A (a^2+b^2) + m_A\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$

$$[I_{yy} = \frac{1}{3} ml^2] \rightarrow I_{yy} = \frac{1}{3} m_A (a^2)$$

$$[I_{zz} = \frac{1}{3} ml^2] \rightarrow I_{zz} = \frac{1}{3} m_A (b^2)$$

$$[I_{ij} = -\int ij\, dm] \rightarrow I_{xy} = \int 0 = 0, \quad I_{xz} = \int 0 = 0$$

har ingen utsträckning i x!

$I_{xy} = I_{yx}$

$$[-I_{yz} = \bar{I}_{yz} + m d_y d_z] \rightarrow I_{yz} = 0 - m_A \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

Del B

$$[I_{xx} = \bar{I}_{xx} + md^2_{G/x}] \rightarrow I_{xx} = \frac{1}{12} m_B (c^2) + m_B\left(b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right)$$

$$[I_{yy} = \bar{I}_{yy} + md^2_{G/y}] \rightarrow I_{yy} = \frac{1}{12} m_B (c^2+d^2) + m_A\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)$$

$$[I_{zz} = \bar{I}_{zz} + md^2_{G/z}] \rightarrow I_{zz} = \frac{1}{12} m_B (d^2) + m_B\left(b^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)$$

$$[-I_{xy} = \bar{I}_{xy} + m d_x d_y] \rightarrow I_{xy} = 0 - m_B \left(\frac{d}{2}\right)(b)$$

$$[-I_{xz} = \bar{I}_{xz} + m d_x d_z] \rightarrow I_{xz} = 0 - m_B \left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) \leftarrow$$

(avstånd i x-led till z-axeln) ·(avstånd i z-led till x-axeln)

$$[-I_{yz} = \bar{I}_{yz} + m d_y d_z] \rightarrow I_{yz} = 0 - m_B (b)\left(\frac{c}{2}\right)$$

Vi har $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ och $\vec{H}_o = I_o \vec{\omega}$, med

$$I_o = \begin{bmatrix} I^A_{xx} + I^B_{xx} & -m_B \frac{db}{2} & -m_B \frac{dc}{4} \\ -m_B \frac{db}{2} & I^A_{yy} + I^B_{yy} & -m_B \frac{bc}{2} \\ -m_B \frac{dc}{4} & -m_B \frac{bc}{2} & I^A_{zz} + I^B_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_o = \left(-\omega m_B \frac{dc}{4}, -\omega m_B \frac{bc}{2}, \omega\left[\frac{m_A b^2}{3} + m_B b^2 + m_B \frac{d^2}{3}\right]\right)$$

5.2.3. Generella moment- och energiekvationer

Nu är vi äntligen redo att tillämpa generella moment- och energiekvationer!

Momentekvationer Här upprepar vi momentekvationerna för ett system med konstant massa:

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$$

$$\sum \mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$$

I den andra ekvationen beräknar vi rörelsemängdsmoment och vridmoment kring antingen masscentrum eller en fix punkt. I härledningen använde vi dock ett fixt koordinatsystem - om vi istället vill uttrycka $\mathbf{H}$ i termer av ett koordinatsystem som roterar med vinkelhastighet $\vec{\Omega}$ så får vi

$$\sum \mathbf{M} = \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \mathbf{H} \tag{70}$$

Detta är den mest generella formen för momentekvationen. Om koordinataxlarna är fästa i kroppen (antingen i en fix punkt eller i masscentrum) sätter vi helt enkelt $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$.

Eulers ekvationer

Som vi minns kan vi för ett origo fixt till kroppen välja koordinataxlar längs kroppens huvudaxlar, så att $\bar{\mathbf{I}}$ blir diagonal. (notera att även här måste origo ligga i masscentrum, eller i en punkt O som är fix både i rymden och relativt kroppen själv). Då får vi, efter en del insättningar, ett specialfall för kraftmomenten:

$$\begin{aligned}
\sum M_x =& I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z \\
\sum M_y =& I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x \\
\sum M_z =& I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y
\end{aligned}$$

Dessa kallas *Eulers ekvationer* och är användbara för att studera stelkroppsrörelse. De måste dock lösas numeriskt!

Energiekvationer

Kraftresultanten $\sum \mathbf{F}$ och det resulterande kraftmomentet $\sum \mathbf{M_G}$ uträttar arbete enligt $\sum \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ respektive $\sum \mathbf{M_G} \cdot \vec{\omega}$. Genom att integrera får vi det totala arbetet som utförts under ett tidsintervall:

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_G} \cdot \vec{\omega} dt = \frac{1}{2}\Delta(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G}) + \frac{1}{2}\Delta(\vec{\omega} \cdot \mathbf{H_G}) \tag{71}$$

Precis som tidigare kommer det totala arbete som uträttas på kroppen under ett tidsintervall vara lika med förändringen i kinetisk energi plus förändringen i potentiell energi:

$$U = \Delta T + \Delta V$$

5.2.4. Planparallell rörelse

Inom planparallell rörelse rör sig varje punkt i en stelkropp endast i två dimensioner. Vi kan alltså införa ett x-y-plan och se alla punkter röra sig antingen i eller parallellt med detta - ett exempel är när ett tredimensionellt objekt rullar nedför en sluttning. Kroppens rotation kommerha formen $\vec{\omega} = (0,0,\omega_z)$. Sätter vi in denna vinkelhastighet i våra tidigare ekvationer för $\mathbf{H}, \mathbf{M}$ så förenklas de enormt. Detta är samma procedur som när vi räknade på plan rörelse.

Sample problem 7/7? (s 553)

5.2.5. Gyroskopisk rörelse

Gyroskopisk rörelse innebär att en kropps rotationsaxel själv roterar runt en annan axel. Stelkroppens vinkelhastighet $\overrightarrow{\omega}$ har alltså själv en rotation kring en rymdvektor $\overrightarrow{\Omega}$.

Ta med bild!

Förenklad approach

Vi studerar en rotor som snurrar med en hög vinkelhastighet $\mathbf{p}$ runt z-axeln: detta är dess så kallade *spinnhastighet*. Om vi inför ett kraftmoment $\mathbf{M}$ kring x-axeln, kommer detta ge upphov till en rotation kring **y-axeln** med en relativt långsam vinkelhastighet $\overrightarrow{\Omega}$. Detta är kroppens *precessionshastighet*.

Rotorn kommer alltså *inte* snurra runt x-axeln enligt momentet $\mathbf{M}$, som den skulle om rotorn inte hade någon spinnhastihget ($\mathbf{p} = 0$). Boken har ett grafiskt bevis för detta på s. 558-559 som jag tror hjälpte lite. Det vi kommer fram till är att kroppens resulterande moment $\mathbf{M}$ blir

renskriv!

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\overrightarrow{\Omega} \times \mathbf{p} \tag{72}$$

För moment kring masscentrum eller en fix punkt O. Notera här att $d\mathbf{P} \parallel \mathbf{M}$ ger rätt riktning för $\overrightarrow{\Omega}$. När vi tvingar en rotor att precessera, som när ett skepp svänger, ger detta alltså upphov till ett gyroskopiskt kraftmoment $\mathbf{M}$. Hittills har vi antagit att $\mathbf{p} >> \overrightarrow{\Omega}$, så vi bara behöver ta hänsyn till spinnet för att beräkna rotorns rörelsemängdsmoment: $\mathbf{H} \approx \mathbf{Ip}$. Med ett konstant kraftmoment måste $\overrightarrow{\Omega}$ vara liten om $\mathbf{p}$ är stor - men vi vill ändå undersöka hur precessionen påverkar momentekvationerna. För stadig precession ($\dot{\overrightarrow{\Omega}} = 0$) kommer vi fram till att (72) fortfarande gäller, så länge $\overrightarrow{\Omega} \perp \mathbf{p}$.

skriv mer om detta!

Symmetrisk snurra

Symmetriaxeln för en symmetrisk snurra bildar vinkeln θ med precessionsaxeln. Med införandet av kroppens gyrationsradie, så att $I = mk^2$, får man i boken fram precessionshastigheten:

$$\Omega = \frac{g\bar{r}}{k^2 p} \tag{73}$$

Vilket är oberoende av θ! Notera att detta är en approximation baserat på $H_\Omega << H_p$. (73) ger också villkoret för stadig precession för snurran - om denna ekvation inte är uppfylld kommer $\dot{\theta} \neq 0$.

Mer detaljerad analys

Vi kommer nu använda den generella kraftmomentsekvationen för en stelkropp, (70), som ofta blir mycket komplicerad. I många fall har vi dock stadig precession hos en kropp som som roterar kring sin symmetriaxel.

Ponera en rotationssymmetrisk kropp som roterar kring en punkt O längs symmetriaxeln, som vi även väljer som z-axel. Med O som origo kommer då z tillsammans med (godtyckliga) x-och y-axlar ligga längs med kroppens huvudaxlar. Vi noterar att tack vare rorationssymmetri, så kommer rotation kring z inte att ändra på tröghetsmomenten kring x och y. Vi får alltså:

bild, s. 561

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\parallel \end{bmatrix}$$

fig. 7/20 s. 562

Vi inför ett stationärt koordinatsystem XYZ så att precessionen ligger längs med Z-axeln. Kroppens symmetriaxel bildar vinkeln θ med Z-axeln. Kroppen precesserar med hastighet $\dot{\Psi}$ och har spinn p. I punkten som kroppen roterar kring har vi redan infört ett koordinatsystem xyz, som följer kroppens precession men inte dess spinn, så vi får:

$$\overrightarrow{\Omega}_{xyz} = [\dot{\theta}, \dot{\Psi}sin(\theta), \dot{\Psi}cos(\theta)] \tag{74}$$

$$\overrightarrow{\omega}_{xyz} = [\dot{\theta}, \dot{\Psi}sin(\theta), \dot{\Psi}cos(\theta) + p] \tag{75}$$

Vi kan nu använda det välbekanta $\mathbf{H} = \mathbf{I}\overrightarrow{\omega}$ för att få den symmetriska snurrans rörelsemängdsmoment:

$$\mathbf{H}_{xyz} = (I_{xx}\omega_x, I_{yy}\omega_y, I_{zz}\omega_z) = (I_\perp\dot{\theta}, I_\perp\dot{\Psi}sin(\theta), I_\parallel(\dot{\Psi}cos(\theta) + p)) \tag{76}$$

Med $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \overrightarrow{\Omega} \times \mathbf{H}$ får vi då

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\perp\ddot{\theta} \\ I_\perp\frac{d}{dt}(\dot{\Psi}sin(\theta)) \\ I_\parallel\frac{d}{dt}(\dot{\Psi}cos(\theta) + p)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi}sin(\theta) \\ \dot{\Psi}cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_\perp\dot{\theta} \\ I_\perp\dot{\Psi}sin(\theta) \\ I_\parallel(\dot{\Psi}cos(\theta) + p)) \end{bmatrix} \tag{77}$$

Vi noterar att detta är Eulers ekvationer med värden insatta, så dessa kan vi inte lösa analytiskt. Vi kommer kolla på ett förenklat specialfall.

Stabil precession

Vi undersöker nu ett specialfall, stabil precession. Här har snurrans symmetriaxel en konstant vinkel mot precessionsaxeln, $\dot{\theta} = 0$. Vi antar även en konstant precessions- och spinnhastighet: $\ddot{\Psi} = \dot{p} = 0$. Kraftmomentekvationerna för den symmetriska snurran förenklas då till:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \dot{\Psi}sin(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\Psi}cos(\theta)(I_\parallel - I_\perp) + I_\parallel p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{78}$$

Vi får här ett kraftmoment som är konstant i magnitud, och vinkelrätt mot både spinn- och precessionsaxlarna. För att verifiera resultatet från vår förenklade approach provar vi nu att sätta $\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\Psi} = \Omega, M_x = M$. Resultatet blir $M = I\Omega p$, vilket är samma som tidigare!

När den symmetriska snurran rör sig med värden av $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ kommer det finnas ett moment kring den roterande x-axeln från snurrans egen vikt. Detta moment är $mg\bar{r}sin(\theta)$. Använder vi detta får vi:

$$M = mg\bar{r}sin(\theta) = \dot{\Psi}sin(\theta)(\dot{\Psi}cos(\theta)(I_\parallel - I_\perp) + I_\parallel p) \tag{79}$$

$$\implies mg\bar{r} = \dot{\Psi}I_\parallel p + \dot{Psi}^2 cos(\theta)((I_\parallel - I_\perp)) \tag{80}$$

I boken använder de $\dot{\Psi} = \Omega << p$ för att strunta i den högra termen. De sätter sedan $I = mk^2$ och får fram $\Omega = \frac{g\bar{r}}{k^2 p}$ precis som innan.

Stabil precession med noll moment

I de fall när momentet kring den fixa punkten är noll, får vi:

$$0 = \dot{\Psi}sin(\theta)(\dot{\Psi}cos(\theta)(I_\parallel - I_\perp) + I_\parallel p)$$

$\dot{\Psi} = 0, sin(\theta) = 0$ är ointressanta lösningar, så vi får:

$$\dot{\Psi} = \frac{I_{\parallel} p}{cos(\theta)(I_{\perp} - I_{\parallel})} \tag{81}$$

Objekt i rymden har inget yttre moment kring sitt massentrum. Eftersom $\sum \mathbf{M} = \dot{H}_G = 0$ har vi ett konstant rörelsemängdsmoment. Vi låter ett xyz-koordinatsystem precessera med kroppen, och väljer en rymdfix Z-axel längs med $\mathbf{H_G}$. I det roterande koordinatsystemet får vi:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_G sin(\theta) \\ H_G cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\perp}\omega_x \\ I_{\perp}\omega_y \\ I_{\parallel}\omega_z \end{bmatrix} \tag{82}$$

$\omega_x = 0$ ger θ konstant, så vi har ett fall av stadig precession kring den konstanta vektorn $\mathbf{H_G}$. $\overrightarrow{\omega}$ ligger i y-z-planet och bildar vinkeln β med den stationära Z-axeln. Boken noterar att:

infoga bild för att förtydliga detta

$I_{\perp} > I_{\parallel} \implies \beta < \theta$ - detta kallas *direkt precession*.

$I_{\perp} < I_{\parallel} \implies \beta > \theta$ - detta kallas *retrograd precession*. Här kommer $\dot{\Psi}$ och p ha motsatt tecken.

Sample problem 7/8 s.566, 7/9 s. 567

5.2.6. Sammanfattning

Skriv sammanfattning

6. Vibration och periodisk rörelse

Vi vill också kunna beskriva rörelsen hos kroppar som oscillerar, eller på annat sätt påverkas av en återställande kraft. Ofta kan vi försumma massan hos till exempel fjädrar. Vi kommer här begränsa oss till problem som endast har en frihetsgrad (innehåller en förflyttningsvariabel x, inte x och y).

6.1. Fritt vibrerande partiklar

När en kropp som sitter fast i en fjäder rubbas från sitt jämviktsläge, så kallar vi dess följande rörelse för *fri vibration*. Detta är såklart endast om det inte finns några yttre krafter. I verkligheten finns det alltid någon sorts bromsande kraft som minskar rörelsen över tid. Vi kommer försumma dessa till att börja med.

6.1.1. Rörelseekvation för odämpad fri vibration

Vi betraktar en liten vagn med hjul och massa m, som ligger på en horisontell yta och är fäst till en vägg med en fjäder. Vi kommer mäta variabeln x från jämviktsläge - i detta fall har vi jämvikt när fjädern varken är utdragen eller ihoptryckt. Om vi flyttar vagnen sträckan x kommer fjädern ge en kraft $F_s = -kx$ som motverkar förflyttningen. Den så kallande *fjäderkonstanten* k har enhet N/m. Vi vet att $\sum F_x = ma = m\ddot{x}$, så

ta med bild

$$-kx = m\ddot{x}$$

Detta kallas *enkel harmonisk rörelse*. Av anledningar som kommer förklaras senare skriver vi detta:

$$\ddot{x} - \omega_n^2 x = 0, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{83}$$

6.1.2. Lösning för odämpad fri vibration

Eftersom vi väntar oss en oscillerande rörelse letar vi efter en lösning som ger x som en periodisk funktion av tiden:

$$x = Acos\omega_n t + Bsin\omega_n t \equiv Csin(\omega_n t + \psi) \tag{84}$$

Med insättning i (83) ser vi att båda ansatserna för x ger en lösning till rörelseekvationen. För att lösa ut A och B (eller C och ψ) behöver vi kunskap om ursprungligt läge och hastighet: $x_0, \dot{x}_0$. Sambandet blir:

$$x_0 = A \qquad \dot{x}_0 = B\omega_n \tag{85}$$

6.1.3. Grafisk representation av rörelsen

Detta verkar vara totalt värdelöst

6.1.4. Jämviktsläget som referens

Vad händer om massan istället hänger vertikalt i fjädern? Vi kommer fortsätta definiera x som förflyttningen från jämviktsläget - jämvikt fås dock nu när fjädern är uttöjd en sträcka δ.

$$-k(\delta + x) + mg = m\ddot{x}$$

Men vid jämvikt är $x = 0$, $\ddot{x} = 0$, så vi får $-k\delta + mg = 0$. Den slutlig rörelseekvationen blir alltså densamma som tidigare:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Vi kan alltså ignorera de likstora och motriktade krafter som verkar på massan vid jämvikt, och endast undersöka avvikelser från jämviktsläget.

6.1.5. Rörelseekvation för dämpad fri vibration

Nu är det dags att ta hänsyn till den där friktionen vi försummade tidigare. En sorts dämpare vi kan införa för att minimera vibrationer (eller helt enkelt visualisera friktionen) är en viskös dämpare. Den kommer ge en återställande kraft som är proportionell mot massans hastighet: $F_d = -c\dot{x}$. Rörelseekvationen med dämpning inräknad blir då:

skriv mer om detta?

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \tag{86}$$

Där c kallas dämpningskonstanten. Utöver substitutionen $\omega_n = \sqrt{k/m}$ kommer vi också vilja införa en dämpningsfaktorn ζ enligt:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

Notera att ζ är dimensionslös! Vi kan nu skriva om rörelseekvationen som:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{87}$$

6.1.6. Lösning för dämpad fri vibration

För att lösa (87) ansätter vi en lösning enligt:

$$x = Ae^{\lambda t}$$

Insättning i (87) ger (efter att vi delat bort den nollskilda faktorn $Ae^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \tag{88}$$

Detta kallas den *karakteristiska ekvationen*, och dess lösningar är:

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Eftersom detta är ett linjärt system kan vi använda *superpositionsprincipen*: den generella lösningen är summan av de individuella lösningarna. Vi får till slut:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

6.1.7. Kategorier av dämpad rörelse

För olika värden på dämpningsfaktorn ζ kommer systemet bete sig på olika sätt. Det visar sig finnas tre olika kategorier av dämpad rörelse.

$\zeta > 1$ Överdämpning

Rötterna λ_1 och λ_2 är negativa reella tal. Rörelsen x kommer gå mot noll för stora t, utan att oscillera. Vi har alltså ingen frekvens för rörelsen - den är som att släppa en säck med mjöl på golvet och undra varför den inte studsar.

$\zeta = 1$ **Kritisk dämpning**

I detta fall är rötterna rella, negativa och lika: $\lambda_1 = \lambda_2$. Vi får ett specialfall för lösningen av vår rörelseekvation:

$$x = (A_1 + A_2)e^{-\omega_n t}$$

Även här har vi en ickeperiodisk rörelse som går mot noll när tiden ökar. Ett kritiskt dämpat system som har en urpsrungsförskjutning och/ eller -hastighet kommer nå jämvikt snabbare än ett överdämpat system. I övrigt kommer de bete sig likadant.

$\zeta < 1$ **Underdämpning**

Vi noterar att rötterna har en term $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ som nu kommer bli imaginär. Då blir lösningen för x

$$x = \left(A_1 e^{i\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}} + A_2 e^{-i\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}}\right)e^{-\zeta\omega_n t}$$

Här är det smidigt att införa (ännu en) variabel $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Vi får

$$x = \left(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right)e^{-\zeta\omega_n t} \tag{89}$$

Om vi föredrar en cosinuslösning kan vi använda $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$:

$$x = \left(A_3 cos(\omega_d t) + A_4 sin(i\omega_d t)\right)e^{-\zeta\omega_n t}$$

Med $A_3 = (A_1 + A_2)$ och$A_4 = i(A_1 - A_2)$. Detta kan man också skriva om som en fasskiftad sinusfunktion, om man vill. Frekvensen $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ kallas den *dämpade naturliga frekvensen.* Denna lösning kan också skrivas om:

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi) \tag{90}$$

6.1.8. Att bestämma dämpningen experimentellt

För ett underdämpat system vill man ofta bestämma dämpningsfaktorn ζ, eftersom det kan vara svårt att exakt veta dämpningskoefficienten c. Då kan man excitera systemet och mäta x som funktion av t. Förhållandet av x-värdet vid två olika toppar är:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta\omega_n\tau_d} \tag{91}$$

Där $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$. Det står lite mer om detta i boken men inte så mycket.

Ta med ett sample problem (s. 591-592)

6.2. Forcerad vibration

Mer generellt kan vi undersöka oscillation där rörelsen förstärks av en störande kraft. Denna kraft kan komma utifrån eller från obalanserade roterande delar inuti systemet.

6.2.1. Harmonisk excitation

Vi tänker oss att kroppen påverkas av en kraft $F = F_0 sin(\omega t)$. Vi kan ställa upp krafterna som verkar på systemet och skriva om rörelseekvationen som:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0 sin(\omega t)}{m} \tag{92}$$

6.2.2. Basexcitation

Det kan också hända att man exciterar en annan del av systemet. Till exempel om en vår massa A sitter fast i en annan massa B med en fjäder. Om B rör sig enligt $x_B = bsin(\omega t)$ får vi i stort sett samma rörelseekvation som (92), men F_0 blir istället $k \cdot b$.

fig. 8/9 skulle vara bra här

6.2.3. Odämpad forcerad vibration

Först studerar vi odämpad forcerad vibration. Detta blir vår rörelseekvation:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0 sin(\omega t)}{m} \tag{93}$$

Den kompletta lösningen till denna differentialekvation är $x = x_c + x_p$ det vill säga, homogenlösningen (då högerledet är noll) plus en partikulärlösning (vilken lösning som helst till den fullständiga ekvationen). Om vi ansätter $x_p = X sin(\omega t)$ får vi

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} sin(\omega t)$$

Homogenlösningen kommer svara mot transienter och kommer dö ut med tiden. Partikulärlösningen x_p svarar dock mot den fortsatta rörelsen och den kallas *steady-state-lösningen*. Notera att amplituden av x_p går mot oändligheten när ω går mot ω_n. ω_n kallas *resonansfrekvens* eller *kritisk frekvens*. De okontrollerade svängningarna av x_p nära denna frekvens kallas *resonans*.

6.2.4. Dämpad forcerad vibration

För att studera dämpad forcerad vibration, återgår vi nu till (92). En homogenlösning har vi redan hittat, men för partikulärlösningen inser vi att en ensam sinus-eller cosinusterm inte räcker till. Vi får istället ansätta:

$$x_p = X sin(\omega t - \phi)$$

Om vi sätter in detta i (92) och matchar koefficienter, så får vi till sist:

$$X = \frac{F_0/k}{[(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2]^{1/2}} \tag{94}$$

$$\phi = tan^{-1}\Big[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\Big] \tag{95}$$

Nu har vi den kompletta lösningen för rörelseekvationen! För underdämpade system, och med vårt resultat från (90) kan vi skriva detta som:

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi) + X sin(\omega t - \phi) \tag{96}$$

Där den första termen i högerledet är transient (homogenlösningen). Längst till höger har vi partikulärlösningen x_p som vi huvudsakligen är intresserade av.

6.2.5. Seismograf

En seismograf används för att mäta vibrationer (e.g jordbävningar). Hela systemet fästs i en ram, som kan röra sig med koordinat x_B.

$$-c\dot{x} - kx = m\frac{d^2}{dt^2}(x + x_B) \tag{97}$$

6.3. Vibrerande stelkroppar

6.4. Energimetoden

Om vi vet att den totala energin är konstant i ett system, så kan vi använda att

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) = 0 \tag{98}$$

6.5. Sammanfattning

7. Analytisk mekanik

Lagrangianen är (kinetisk energi) - (potentiell energi):

$$\mathfrak{L}(x, \dot{x}) = E_{kin} - E_{pot} \tag{99}$$

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta x(t)} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} = 0 \tag{100}$$

Singulära matrisvärden!

Kombinera med Stellans anteckningar somehow

Behövs första halvan av kapitel 5?

Sample problems i appendix?

Att göra-lista

Referenser

A. Derivera rörelsemängdsmomentet

Härledning av $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$ (från Stellans anteckningar). Vi använder $\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{r_i} \times (m_i \mathbf{v_i})$, $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r_i} \times \mathbf{f_i}$:

$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{r_i} \times (m_i \mathbf{v_i}) \tag{101}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_i \dot{\mathbf{r_i}} \times (m_i \mathbf{v_i}) + \sum_i \mathbf{r_i} \times (m_i \dot{\mathbf{v_i}}) \tag{102}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_i \mathbf{v_i} \times (m_i \mathbf{v_i}) + \sum_i \mathbf{r_i} \times (m_i \mathbf{a_i}) \tag{103}$$

Notera att: $\mathbf{v_i} \parallel \mathbf{v_i} \implies \mathbf{v_i} \times \mathbf{v_i} \equiv 0$. Och ansätt $\mathbf{f_i} = m_i \mathbf{a_i}$

$$\implies \dot{\mathbf{H}} = \sum_i \mathbf{r_i} \times \mathbf{f_i} = \mathbf{M} \tag{104}$$

Rörelse runt masscentrum och rörelse av masscentrum. Vad blir $\mathbf{H_{tot}}$? Det beror på hur vi väljer origo!

$$\mathbf{H_o} = \sum_i (\mathbf{R}_{CM} + \mathbf{r_i}) \times (m_i \mathbf{v_i}) \tag{105}$$