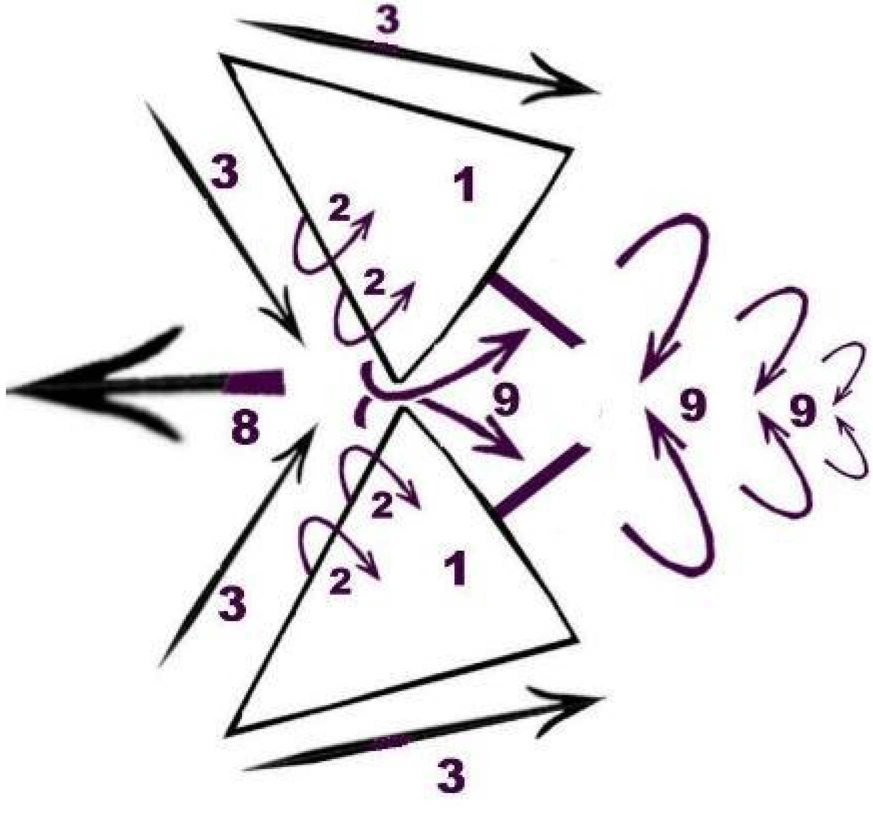
Mekanik del 2 - föreläsningsanteckningar

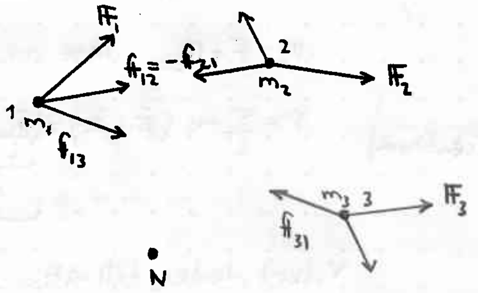
Till er från Philip Krantz



Föreläsning 1

Partikelsystem

Ett partikelsystem består av yttre- och inre krafter enligt följande figur.



I figuren står $\mathbb{F}_i$ för yttre krafter och f_i för inre krafter. För $i = 1, \dots, N$

En stel kropp har 6 frihetsgrader.

Rörelseekvationen för partikel nr i:

$$m_i \ddot{r}_i = \mathbb{F}_i + f_i$$

Men enligt Newtons 3:e lag är $\sum_i f_i = 0$, vilket ger

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i = \sum_i \mathbb{F}_i = \mathbb{F} \quad \text{(Totala kraften)}$$

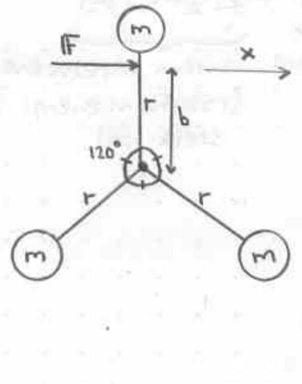
För masscentrum gäller:

$$\bar{r} = \sum_i m_i r_i \Big/ \sum_i m_i \qquad \text{där } \sum_i m_i = m$$

$ma = F$

"Masscentrum beter sig som en partikel med massa m under påverkan av totala (yttre) kraften $\mathbb{F}$."

Sample Problem 4/1



Bestäm masscentrums acceleration samt systemets vinkelacceleration i detta ögonblick.

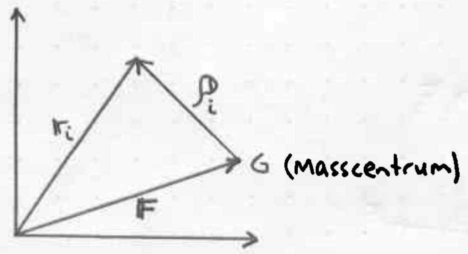
$$\bar{a}_1 = \frac{\mathbb{F}}{3m} = \frac{\mathbb{F}}{3m}\hat{x}$$

Lägg detta tänkande med partikelsystem på minnet.

Det används även för stela kroppar.

Total rörelsemängd

$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i \qquad \dot{\mathbb{P}} = \mathbb{F}$$



Vi har följande samband:

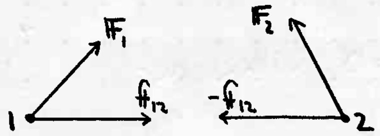
$\mathbb{r}_i = \bar{\mathbb{r}} + \rho_i$ läge rel. G

$$\mathbb{P} = \sum_i m_i(\dot{\bar{\mathbb{r}}} + \dot{\rho}_i) = \underbrace{\underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{m}\dot{\bar{\mathbb{r}}}}_{m\bar{v}} + \underbrace{\sum_i m_i \dot{\rho}_i}_{\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i m_i \rho_i}_{0}}$$

Vilket leder till att:

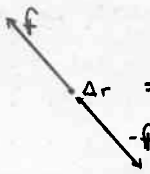
$$\boxed{\mathbb{P} = m\bar{\mathbb{v}}}$$

Energi och arbete



Inre krafter kan också utföra arbete. Men inte i en stel kropp.

dvs.



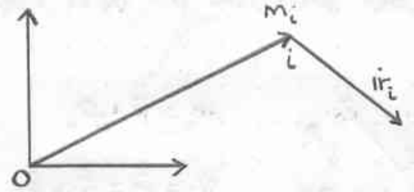
$\Rightarrow$ Inget arbete ! Även sant för

Kinetisk energi för partikelsystem

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbb{r}}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbb{r}}_i \cdot \dot{\mathbb{r}}_i = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i (\dot{\bar{\mathbb{r}}} + \dot{\rho}_i)(\dot{\bar{\mathbb{r}}} + \dot{\rho}_i)\right) =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \cancel{\sum_i m_i \dot{\rho}_i \cdot \dot{\bar{\mathbb{r}}}} + \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m \bar{v}^2}_{\text{translationsenergi}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2}_{\substack{\text{Intern rörelseenergi} \\ \text{(rotationsenergi för} \\ \text{stelkropp)}}}$$

Rörelsemängdsmoment , $\mathbb{L}$



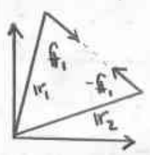
Vi får här i figuren rörelsemängdsmomentet

$$\mathbb{L}_{O_i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

Totalt: $\mathbb{L}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$

Tidsderivatan av $\mathbb{L}_O$ blir:

$$\dot{\mathbb{L}}_O = \sum_i m_i \left(\cancel{\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i} + \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i \right) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \Big(\overset{\text{Yttre}}{\mathbf{F}_i} + \underset{0?}{\overset{\text{Inre}}{\mathbf{f}_i}} \Big)$$



$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{f}_1) = 0!$$

Detta ger att

$$\dot{\mathbb{L}}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O \quad \text{(vridande moment)}$$

Med avseende på masscentrum:

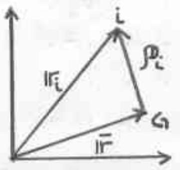
$$\mathbb{L}_G = \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \left(\cancel{\dot{\bar{\mathbf{r}}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \right)$$ Härledning på s. 269

$$\dot{\mathbb{L}}_G = \mathbf{M}_G$$

Föreläsning 2

För partikelsystem (inkl. stela kroppar) är det praktiskt att dela upp dess rörelse i:

- masscentrumsrörelse
- rörelse rel. masscentrum



$r_i = \bar{r} + \rho_i$

$v_i = \dot{r}_i = \dot{\bar{r}} + \dot{\rho}_i$

$a_i = \ddot{r}_i = \ddot{\bar{r}}_i + \ddot{\rho}_i$

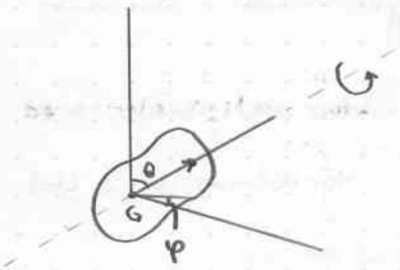
När vi går från ett partikelsystem till att betrakta en stel kropp får vi följande antal frihetsgrader:

$3N \longrightarrow 6 = 3 + 3$

translation, rotation

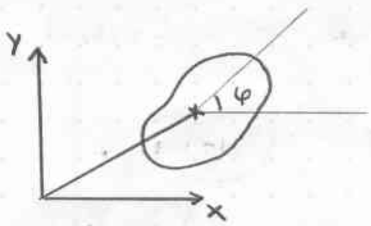
Vi har

3 rotationsfrihetsgrader. Dessa uttrycks med hjälp av Eulervinklar.



I stället för att betrakta "läget" - tittar vi istället på "hastigheter" dvs vinkelhastigheter, ω, Ω

Plan rörelse

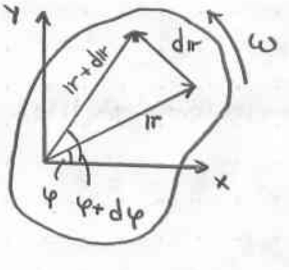


Translation: 2 frihetsgrader

Rotation: 1 frihetsgrad (kan jämföras med 3-D rörelse, där endast rotation kring z-axeln är tillåten.)

Vinkelhastighet: $\omega = \dot{\varphi}$

Hastighet: $\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$



Utifrån figuren t.v. ser vi följande

$|d\mathbf{r}| = r \cdot d\varphi$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = r\frac{d\varphi}{dt}$$

$|\dot{\mathbf{r}}| = r\omega$

Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$: $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$

$\boldsymbol{\omega}$ pekar längs rotationsaxeln och är riktad "enligt skruvregeln."

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}$$

Plan rörelse

$$\left.\begin{array}{l} v_r = 0 \\ v_\varphi = r\omega \end{array}\right\} \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}$$

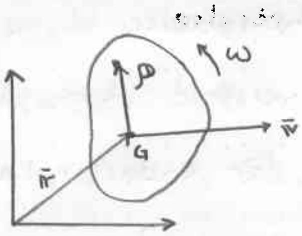
Plan rörelse $\dot{\omega}\hat{z}$

riktad i $\hat{\varphi}$-led dvs fartriktningen

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$: belopp $= \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$

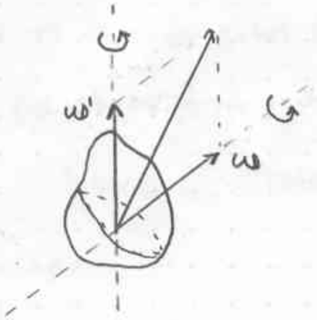
riktad i $-\hat{r}$-led och kallas centripetalacceleratio

Translation och rotation



3-Dim rotation

Betrakta följande rotation kring en axel



$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$d\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\, dt$ (där d representerar en liten tid)

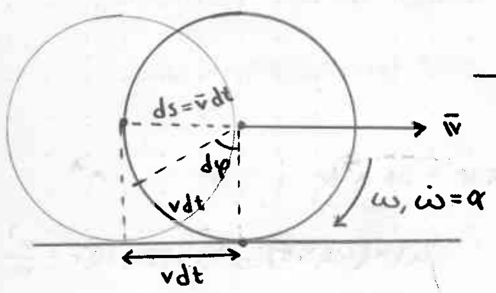
Rotation med ω': $d\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}\, dt$

Vi adderar nu båda rotationerna

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\, dt + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}\, dt = (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}') \times \mathbf{r}\, dt$$

Att kunna addera rotationsvektorer återkommer senare för 3-D rotation.

Sample Problem 5/4

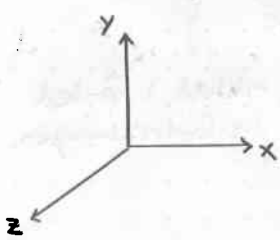


Lösning:

Vi ser att $r\,d\varphi = \bar{v}\,dt$ ty sträckan som rullat i marken på cylindern måste sammanfalla med marksträckan

$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\bar{v}}{r} \Rightarrow \bar{v} = \omega r$

$\bar{a} = \alpha r$



$\boldsymbol{\omega} = -\omega \hat{z} = -\frac{\bar{v}}{r}\hat{z}$

$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{\bar{a}}{r}\hat{z}$

$\mathbf{r}$ läge för punkten på periferin

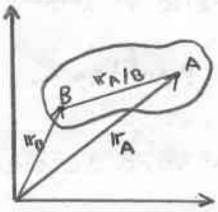
$\dot{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{a}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = \bar{\mathbf{a}} - \frac{\bar{a}}{r}\hat{z} \times \boldsymbol{\rho} + \frac{\bar{v}^2}{r^2}\hat{z} \times (\hat{z} \times \boldsymbol{\rho})$$

$$\mathbf{a} = \bar{a}\hat{x} - \bar{a}\hat{z} \times \hat{y} + \frac{\bar{v}^2}{r}\hat{z} \times \underbrace{(\hat{z} \times \hat{y})}_{-\hat{x}} = \frac{\bar{v}^2}{r}\hat{y}$$

Föreläsning 3

Relativ hastighet för en stel kropp i plan rörelse



Avståndet mellan A och B: r

$$\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$$

Antal frihetsgrader: $\mathbf{r}_B$: 2

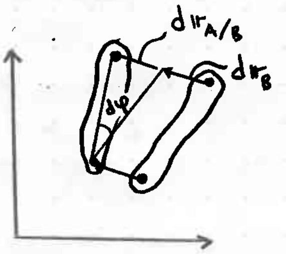
$\mathbf{r}_A$: 1 ty $|\mathbf{r}_{A/B}|$ är konstant

Vi ser på figuren att

$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$ där $\mathbf{r}_{A/B}$ är relativ ortvektor

jämför

$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}$ för partikelsystem



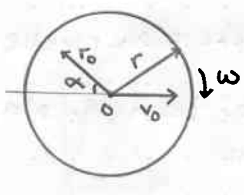
Figuren visar en kombination av dels translation men även rotation.

Tidsderivatan av lägesvektorerna ger hastigheten:

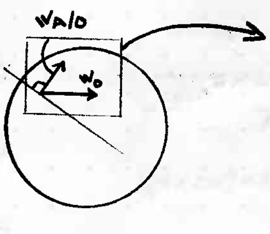
$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt}$$

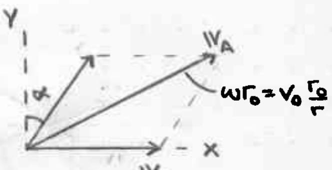
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

Sample Problem 5/7



Lösning:





Vi har

Givet: $\alpha = 30°$ Sökt: $\mathbf{v}_A$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{A/O} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O}$$

$r = 0.3$

$$\mathbf{v}_A = v_0 \hat{x} + v_0 \frac{r_0}{r}(\hat{x}\sin\alpha + \hat{y}\cos\alpha) = v_0\left(\left(1 + \frac{r_0}{r}\sin\alpha\right)\hat{x} + \frac{r_0}{r}\cos\alpha\right.$$

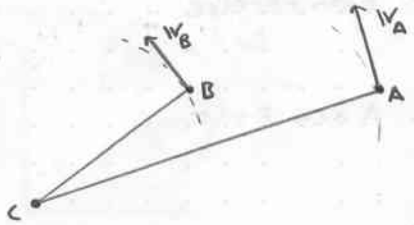
$r_0 = 0.2m$

Vi gör en dim-kontroll och kan konstatera att

$v_0 = 3m/s$

dim stämmer.

Momentant "rotationscentrum"

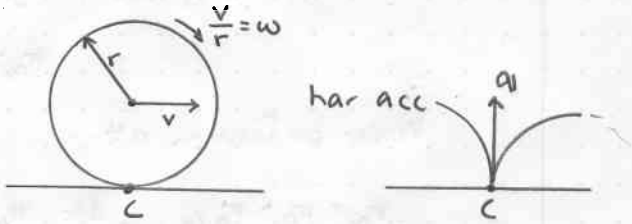


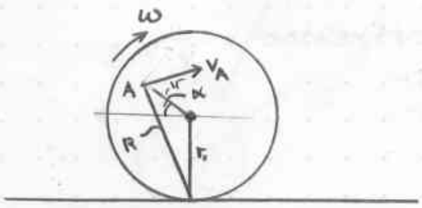
Hela kroppens rörelse är (momentant)

i rotation kring punkten C.

[Varning: C kan vara accelererad]

<u>Ex.</u>

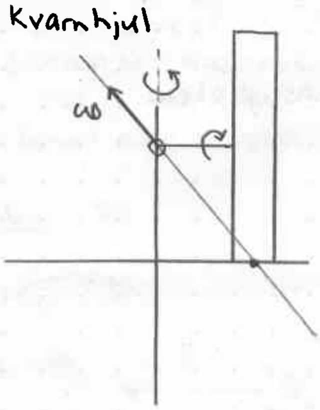




För denna figur gäller

$V_A = R\omega$ där $R = \mathbb{r} + \mathbb{r}_0$

<u>Ex</u> Kvarnhjul

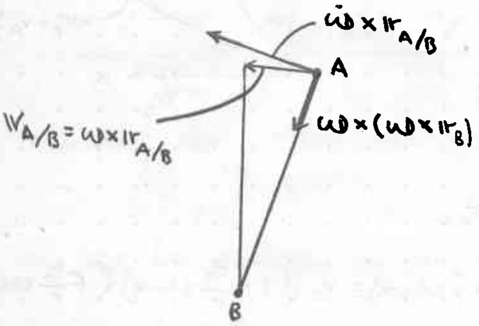


<u>Rel. hastighet</u>

$$\mathbb{v}_A = \mathbb{v}_B + \underbrace{\mathbb{v}_{A/B}}_{\omega \times \mathbb{r}_{A/B}}$$

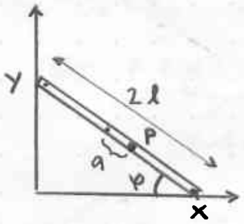
<u>Rel. acceleration</u>

$$a_A = a_B + \underbrace{a_{A/B}}_{\dot{\omega} \times \mathbb{r}_{A/B} + \omega \times (\omega \times \mathbb{r}_{A/B})}$$



Obs. $\dot{\omega} \times \mathbb{r}_{A/B}$ även icke-plan rörelse men riktningen gäller bara för plan rörelse.

Ex

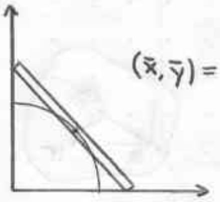


Bestäm v och a för punkte P uttryckt i

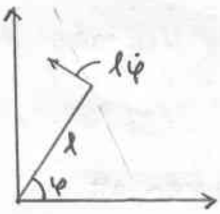
φ, $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = \alpha$

Nu har vi en icke-fix punkt P. Vi delar då upp rörelserna:

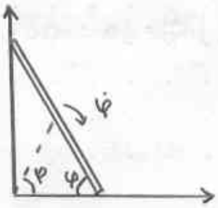
$\begin{cases} \text{mittpunkts translation} \\ \text{rotation kring mittpunkten} \end{cases}$



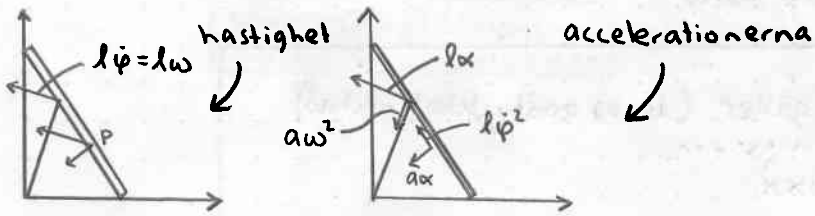
$(\bar{x}, \bar{y}) = (l\sin\varphi, l\cos\varphi) \Rightarrow$ cirkelbåge



Vi har nu rotation



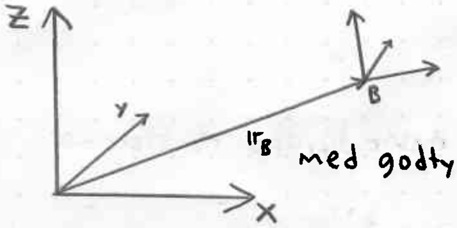
"Åt motsatt håll"



Föreläsning 4

Rörelse relativt roterande koordinatsystem

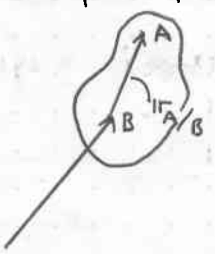
Betrakta nedanstående inertialsystem



med godtyckligt tidsberoende (translation)

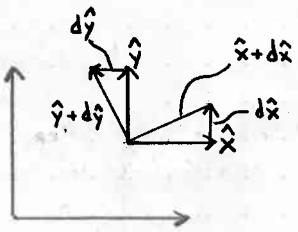
Vi har två olika fall med relativ rörelse

1) A fix punkt på kroppen



2) A varierar med tiden

Betrakta nu följande rotation



Vi kan utläsa ur figuren att

$d\hat{x}$ pekar som $\hat{y}$, $|d\hat{x}| = d\theta = \omega dt$ $\quad d\hat{x} = \omega dt\,\hat{y}$

$d\hat{y}$ pekar som $-\hat{x}$, $|d\hat{y}| = d\theta = \omega dt$ $\quad d\hat{y} = -\omega dt\,\hat{x}$

Ur detta får vi således

$$\dot{\hat{x}} = \omega\hat{y} = \omega\times\hat{x}$$

$$\dot{\hat{y}} = -\omega\hat{x} = \omega\times\hat{y}$$

Allmänt gäller (då ω godtyckligt riktad)

$$\dot{\hat{x}} = \omega\times\hat{x}$$

$$\dot{\hat{y}} = \omega\times\hat{y}$$

$$\dot{\hat{z}} = \omega\times\hat{z}$$

För figur 2) på föregående sida gäller

$\mathbb{r}_A = \mathbb{r}_B + \mathbb{r}$

där $\mathbb{r} = \underbrace{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}_{\text{Samtliga tidsberoende}}$

Vi deriverar $\mathbb{r}_A$ och får:

$$\mathbb{v}_A = \dot{\mathbb{r}}_A = \dot{\mathbb{r}}_B + \underbrace{(x\dot{\hat{x}} + y\dot{\hat{y}} + z\dot{\hat{z}})} + \underbrace{(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z})}$$

$\omega \times \mathbb{r}$ (som tidigare) Svarar mot att koordinatsystemet ändrar sin orientering.

$\mathbb{v}_{rel}$ Beror på ändring av läget relativt koordinatsystemet.

Närvarande även om $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$

Detta leder till att:

$$\mathbb{v}_A = \mathbb{v}_B + \underbrace{\omega \times \mathbb{r} + \mathbb{v}_{rel}}_{\dot{\mathbb{r}}}$$

Acceleration

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}) = \omega \times \mathbb{v}_{rel} + (\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z})$$

För $\hat{x}$ o.s.v

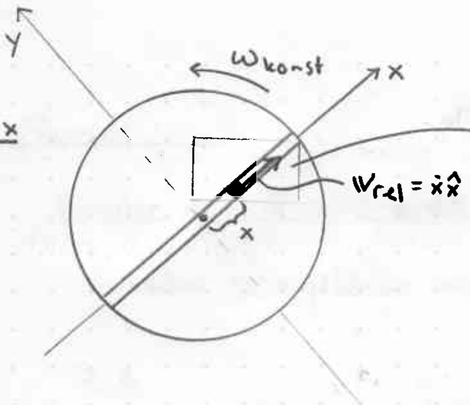
$$\mathbb{a}_A = \mathbb{a}_B + \dot{\omega} \times \mathbb{r} + \omega \times \boxed{\dot{\mathbb{r}}} + \boxed{\dot{\mathbb{v}}_{rel}}$$

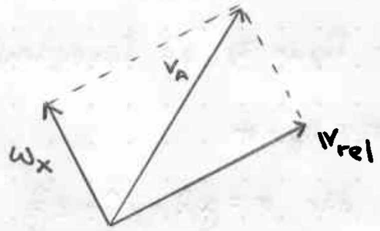
$\omega \times \mathbb{r} + \mathbb{v}_{rel}$

Detta ger alltså:

$$\mathbb{a}_A = \mathbb{a}_B + \dot{\omega} \times \mathbb{r} + \underbrace{\omega \times (\omega \times \mathbb{r})}_{\text{Centripetal acceleration}} + \underbrace{2\omega \times \mathbb{v}_{rel}}_{\text{Coriolis acceleration}} + \mathbb{a}_{rel}$$

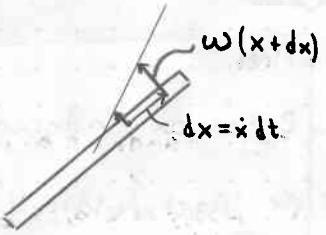
Ex





Följande förlopp utvecklas:

1)

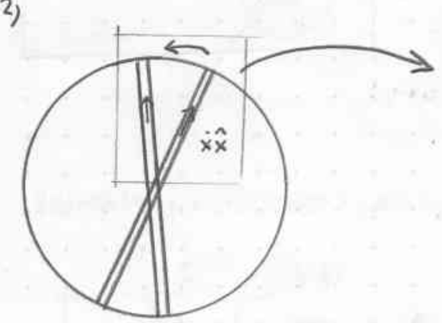


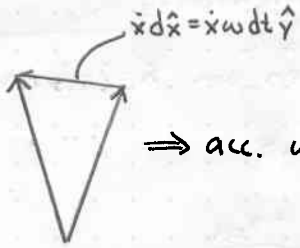
Hastighetsändring ↖ $\omega dx = \omega \dot{x} dt$

$\frac{1}{dt} \rightarrow acc$

↖ $\omega \dot{x} \hat{y} = \omega \hat{z} \times (\dot{x}\hat{x}) = \omega \times v_{rel}$

2)





$\Rightarrow$ acc. $\omega \times v_{rel}$

Vi får nu två bidrag:

- Ett för att hastigheten p.g.a rotation vilken ändras då radien ändras.
- Ett för att riktningen ändras med rotationen.

<u>Dessa är lika stora</u>

<u>Newtons andra lag i inertialsystem</u>

$$F = ma_A = m\left(a_B + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times v_{rel.} + a_{rel}\right)$$

$$F - \boxed{ma_B} - \boxed{m\dot{\omega} \times r} - \boxed{m\omega \times (\omega \times r)} - \boxed{2m\omega \times v_{rel.}} = ma_{rel}$$

Fiktiva krafter "Tröghetskrafter"

Föreläsning 5

Stelkroppsdynamik

Allmän stelkroppsrörelse har 6 frihetsgrader:

3 st translation (masscentrums läge)
3 st rotation - talar inte om "läget" utan om "hastigheten" ω

Dessa beskriver 6 rörelseekvationer

Translation:

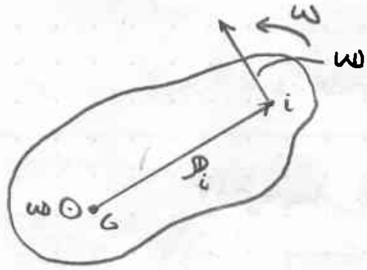
$$\mathbb{F} = m\bar{\mathbf{a}} \Leftarrow \begin{cases} \dot{\mathbb{p}} = \mathbb{F} \\ \mathbb{p} = m\bar{\mathbf{v}} \end{cases}$$

Rotation:

$\mathbb{M}_G =$ "ändring av ω" $\dot{\mathbb{L}}_G$

Vi behöver en relation mellan $\mathbb{L}$ och ω

Plan rörelse (2-D)



$(|\omega \times \rho_i| = \omega \rho_i)$

$$\mathbb{L}_G = \sum_i \rho_i \times \mathbb{p}_i = \sum_i \rho_i \times m_i (\omega \times \rho_i)$$

Vi tittar nu bara på komponenter $/\!/ \omega$: $\mathbb{L}_G$

$$L_G = \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}\omega = \bar{I}\omega$$

Beror bara på kroppens massfördelning.

Tröghetsmoment, $\bar{I}$

Vi har följande ekvation för plan rotationsrörelse:

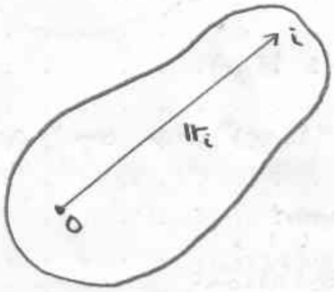
$M_G = \bar{I}\dot{\omega} \; (= \bar{I}\alpha)$ där α är vinkelaccelerationen

I fall kroppen har en fix punkt O. 3 frihetsgrader.

$$\mathbb{M}_O = \dot{\mathbb{L}}_O$$

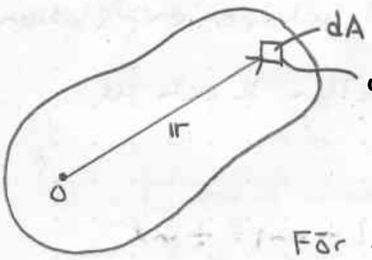
Beräkning av tröghetsmoment

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2$$



(m.a.p axel: r_i är avståndet till axeln)

Kontinuerlig massfördelning:



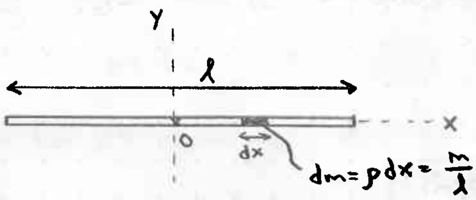
$dm = \rho dA$ där ρ är densitet (massa/ytenhet)

$$I_O = \int \rho r^2 dA$$

För en 3-dim kropp har vi

$$\boxed{I_O = \int r^2 dm}$$ där $dm = \rho dV$

Ex 1 Rak, tunn och homogen stav

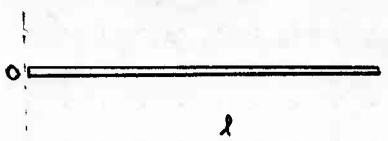


$dm = \rho dx = \frac{m}{l} dx$

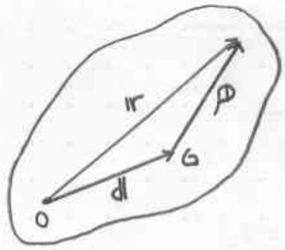
Vi får

$$I_O = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} m l^2$$

Ex 2 Samma stav fast vi betraktar den fasthållen i änden.



Nu fås $I_O = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{3} m l^2$ (4 ggr större)



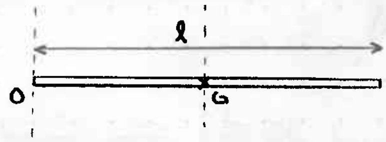
$$I_O = \int r^2 dm = \int (d^2 + \rho^2 + 2\,\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\rho})dm =$$

$$= \int \rho^2 dm + \underbrace{\boxed{md^2}}_{\text{Tröghetsmoment för partikel i G}} + \mathbf{d}\cdot \underbrace{\cancel{\int \boldsymbol{\rho}\, dm}}_{\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0}$$

Parallellaxelteoremet "Steiners sats" lyder:

$I_O \geq \bar{I}$ med likhet endast då $O = G$

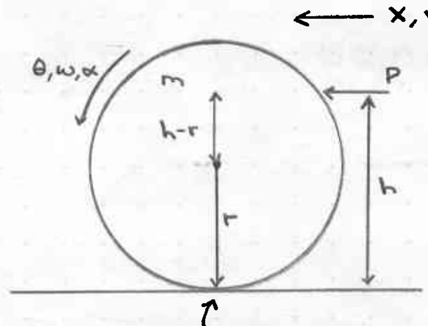
Ex 3 Vi visar nu sambandet mellan de båda punkternas tröghetsmoment.



Vi har

$$I_G = \frac{1}{12}ml^2 \Rightarrow I_O = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}ml^2$$

Ex.



Vilken kraft behövs från underlaget?
Kan den vara noll?

Vi har:

Translation:

$$m\bar{a} = P - F$$

Rotation:

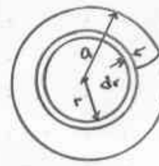
$$\bar{I}\alpha = Fr + P(h-r)$$

Rullning:

$$\bar{a} = r\alpha$$

Utifrån dessa ekvationer fås

$$\begin{cases} m\bar{a} = P - F \\ \underbrace{\bar{I}\bar{a}}_{\bar{I}\frac{P-F}{m}} = Fr^2 + Pr(h-r) \end{cases}$$



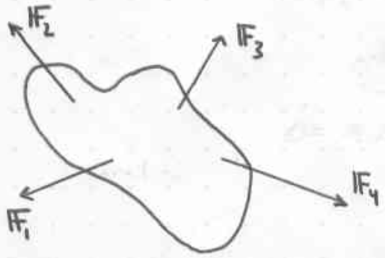
$$dm = \rho dr \cdot 2\pi r = \frac{m}{\cancel{\pi} a^2}\cdot 2\cancel{\pi} r\, dr$$

$$\rho = \frac{m}{\pi a^2}$$

$$\bar{I} = \int_0^a r^2 dm = \int_0^a \frac{m}{a^2}\cdot 2r^3 dr = \frac{2m}{a^2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a = \frac{ma^2}{2}$$

Då $F = 0$: $h = \frac{3}{2}r$

Dynamik för stela kroppar



$\mathbb{M} = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$

Lagen för masscentrums rörelse:

$m\mathbb{a} = \Sigma \mathbb{F}$

Impulsmomentlagen:

$\frac{d\mathbb{L}_0}{dt} = \Sigma M_0$ (m.a.p en fix punkt)

$\frac{d\mathbb{L}_G}{dt} = \Sigma M_G$ (m.a.p masscentrum)

I plan rörelse gäller istället:

$I_0 \alpha = \Sigma M_0$

$\bar{I}\alpha = \Sigma \bar{M}$

Föreläsning 6

Allmänt:

Energi är oförstörbar

"$\Delta T = W$" där ΔT är ändringen av rörelseenergi

W är arbete

Arbete som kraft uträttar: $dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

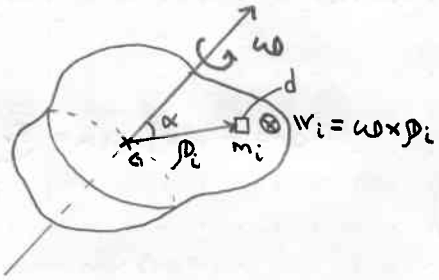
——"—— moment —"—: $dW = M\,d\theta$

Kinetisk energi vid translation: $T = \frac{1}{2}mv^2$

rotation: $T = \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ (kring G)

Detta leder till att total kinetisk energi blir

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \quad \text{eller} \quad T = \frac{1}{2}I_0\omega^2$$



$v_i = \omega \rho_i \sin\alpha$

Vi får här den kinetiska energin:

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i\omega^2 d_i^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_i m_i d_i^2\right)}_{\bar{I}}\omega^2 = \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \quad \text{(fix axel)}$$

För partikelsystem

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i|\dot{\rho}_i|^2$$

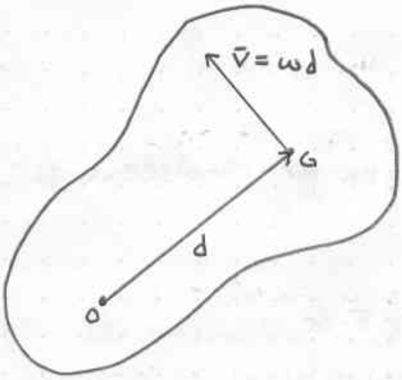
och stel kropp

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

eller

$$T = \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Vi gör en kontroll:

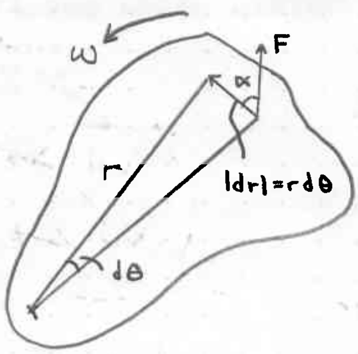


$$T = \begin{cases} \frac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}(\bar{I} + md^2)\omega^2 \\ \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \end{cases}$$

Vi får alltså

$$I_0 = \bar{I} + md^2$$

Det stämmer enligt Steiners sats.

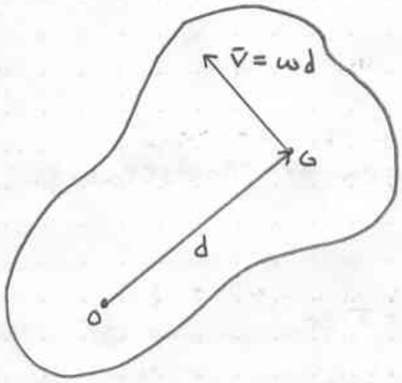


$$\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = F|d\mathbb{r}|\cos\alpha = \underbrace{Fr\cos\alpha}_{M}\, d\theta = M d\theta$$

Effekt, P (Power):

$$P = \frac{\text{arbete}}{\text{tidsenhet}} = \frac{dW}{dt} = \begin{cases} \mathbb{F}\cdot\mathbb{v} \\ M\cdot\omega \end{cases}$$

Vi gör en kontroll:

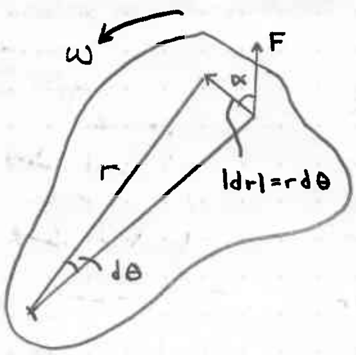


$$T = \begin{cases} \frac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}(\bar{I} + md^2)\omega^2 \\ \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \end{cases}$$

Vi får alltså

$$I_0 = \bar{I} + md^2$$

Det stämmer enligt Steiners sats.

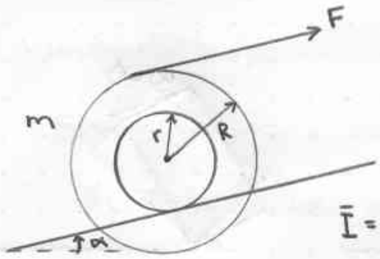


$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F|d\mathbf{r}|\cos\alpha = \underbrace{Fr\cos\alpha}_{M}\,d\theta = M\,d\theta$$

Effekt, P (Power):

$$P = \frac{\text{arbete}}{\text{tidsenhet}} = \frac{dW}{dt} = \begin{cases} \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \\ M\cdot\omega \end{cases}$$

Sample Problem 6/9



$\bar{I} = ma^2$

Givet:

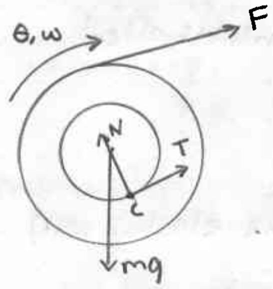
$m = 40\,kg$, $r = 0.1m$, $R = 0.2m$

$a = 0.15m$, $F = 100N$, $s = 3m$

Beräkna ω när rullen rört sig sträckan s utan att glida?

Lösning:

Vi frilägger rullen



Eftersom punkten c momentant står stilla

utför N och T inget arbete.

Vi får

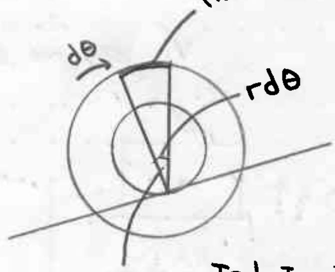
Arbete från F: $F(1+\frac{R}{r})dx$

från mg: $-mg\sin\alpha \cdot dx$

Förflyttning: $\Delta x = s$

arbete: $\underset{\Delta T}{\overset{}{W}} = [F(1+\frac{R}{r}) - mg\sin\alpha]s$

$(R+r)d\theta = dx(1+\frac{R}{r})$



$T = \frac{1}{2} I_c \omega^2$

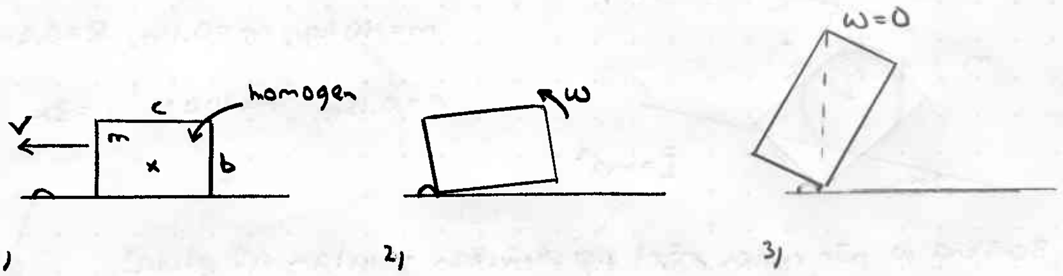
Detta ger

där $I_c = \bar{I} + mr^2 =$

$\frac{1}{2}m(a^2+r^2)\omega^2 = [F(1+\frac{R}{r}) - mg\sin\alpha]s$ dim OK!

$= m(a^2+r^2)$

Ex Låda som glider mot ett hinder.

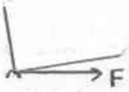


Vi betraktar de olika stegen:

② → ③: Rörelseenergi → lägesenergi

(Vi försummar arbete från kontaktkrafter)

① → ②: p ej bevarad

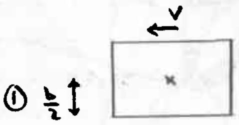


E antagligen ej bevarad (icke-elastisk stöt)

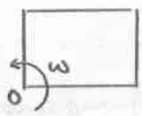
L_0 bevarad ty kontakt sker under mkt kort tid Δt

$F\Delta t = \Delta p$ "Normalstor"

Vi kan nu se att $F = \frac{\text{normalstor}}{\text{pyttelite}}$ = jättestor

① 

$L_0 = \frac{b}{2} mv$

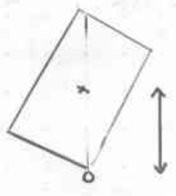
② 

$L_0 = I_0 \omega$

$$I_G = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \frac{m}{bc}(x^2+y^2)$$

$$\frac{m}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} mb^2$$

$$\frac{m}{c}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} mc^2$$

③ 

$\sqrt{\frac{b^2+c^2}{4}}$

$I_0 = \frac{1}{3} m (b^2+c^2)$

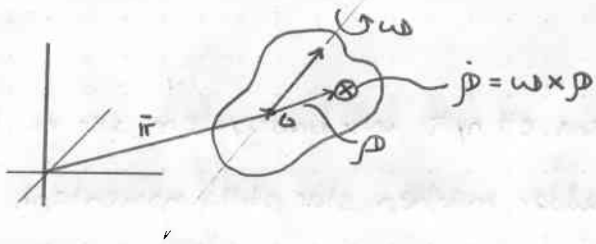
L_0 bevarad $\Rightarrow \frac{1}{3} m (b^2+c^2)\omega = \frac{1}{2} bv$

Föreläsning 7

Allmän stelkroppsrörelse

Kinematik

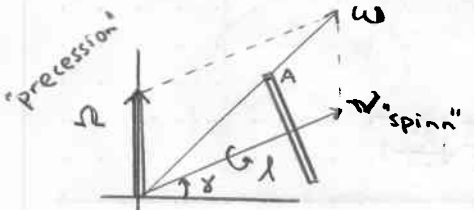
Betrakta figuren nedan



Vi har följande v och a

$$v = \bar{v} + \underbrace{\boxed{\omega \times \rho}}_{\dot{\rho}} \qquad a = \bar{a} + \dot{\omega} \times \rho + \underbrace{\boxed{\omega \times (\omega \times \rho)}}_{\text{centripetalacceleration}}$$

Sample Problem 7/2 - "Precessions rot."



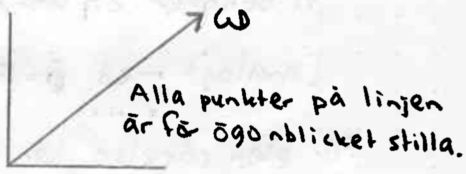
Givet: $\gamma = 30°$, $r = 0.125\,m$, $\ell = 0.25\,m$

$v = 4\pi s^{-1}$ $\Omega = 2\pi s^{-1}$

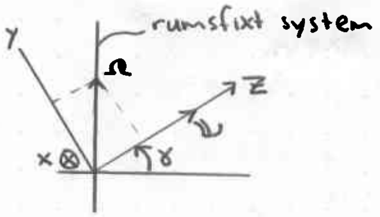
Sökt: ω, α, v_A, a_A

Ω konstant i tiden

v icke konstant $\dot{v} = \Omega \times v$



$\omega = \Omega \times v.$



$$v = v\hat{z}$$

$$\Omega = \Omega\cos\gamma\,\hat{y} + \Omega\sin\gamma\,\hat{z}$$

$$\omega = \Omega\cos\gamma\,\hat{y} + (v + \Omega\sin\gamma)\hat{z}$$

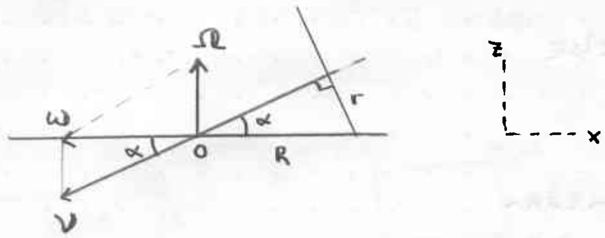
$$\alpha = \dot{\omega} = \dot{v} = \Omega \times v = \Omega v\cos\gamma\,\hat{x} \quad \text{OK!}$$

Nu bestämmer vi v_A:

$$v_A = \omega \times r_A = \left[\Omega\cos\gamma\,\hat{y} + (v + \Omega\sin\gamma)\hat{z}\right] \times (r\hat{y} + \ell\hat{z}) =$$

$$= \hat{x}\left[\Omega\ell\cos\gamma - r(v + \Omega\sin\gamma)\right]$$

Uppg 7/135



Precessionsrörelse

Istället för att införa ett nytt koordinatsystem, ser vi till att den punkt som nuddar marken står stilla momentant.

$\sin\alpha = \frac{r}{R}$

$\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$

$\nu = -\nu\cos\alpha\,\hat{x} - \underbrace{\nu\sin\alpha}_{\Omega}\,\hat{z}$, $\nu = \frac{\Omega}{\sin\alpha} = \Omega\frac{R}{r}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Insättning ger nu

$$\omega = -\hat{x}\nu\cos\alpha = -\hat{x}\,\frac{2\pi}{\tau}\,\frac{R}{r}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} = -\hat{x}\,\frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\frac{R^2}{r^2}-1}$$

För dynamik: $\dot{\mathbb{L}} = \mathbb{M}$

Vi behöver ett uttryck för $\mathbb{L}$ i termer av ω

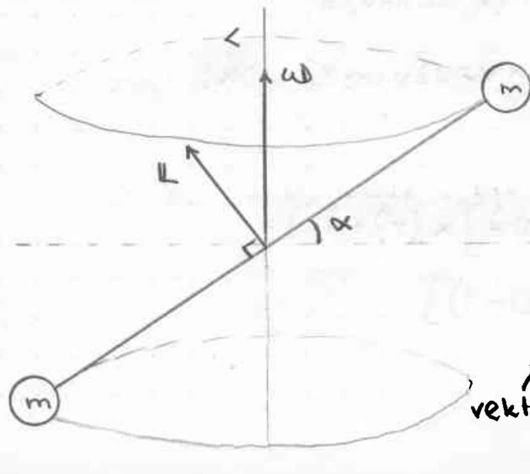
[analogt med $\dot{\mathbb{p}} = \mathbb{F}$, $\mathbb{p} = m\mathbb{v}$]

För plan rörelse har vi

$L = I\omega$ där I är tröghetsmoment m.a.p axeln.

$\Rightarrow I\dot{\omega} = M$

Vi illustrerar för ökad förståelse



$\otimes\ \mathbb{v} = \omega \times \mathbb{r}$ $\quad v = \omega r\cos\alpha$

Vi har bidrag till $\mathbb{L}$

$\mathbb{r} \times \mathbb{p} = m\,\mathbb{r} \times \mathbb{v}$

Obs. $\mathbb{L}$ är inte // med ω. $L = 2mr^2\omega\cos\alpha$

$\mathbb{L} = \mathbb{I}\,\omega$

vektor matris vektor

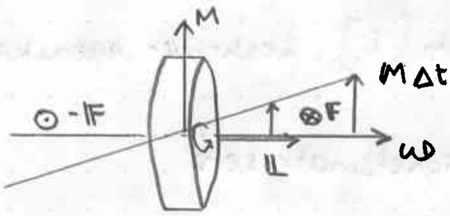
Föreläsning 8

Vi har relationen

$$\dot{\mathbb{L}} = \mathbb{M}$$

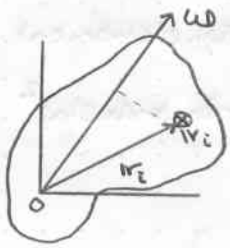
Vad är $\mathbb{L}$?

Ex.



$$\dot{\mathbb{L}} = \mathbb{M}$$

$$\Delta \mathbb{L} = \mathbb{M} \Delta t$$



Bidrag till $\mathbb{L}$:

$$\mathbb{L}_i = \mathbb{r}_i \times \mathbb{p}_i = m_i \mathbb{r}_i \times \mathbb{v}_i = m_i \mathbb{r}_i \times (\omega \times \mathbb{r}_i)$$

$$\mathbb{L}_0 = \sum m_i \mathbb{r}_i \times (\omega \times \mathbb{r}_i)$$

kont.

$$\mathbb{L}_0 = \int \boxed{dm}\, \mathbb{r} \times (\omega \times \mathbb{r})$$

$$dm \to \rho\, dv$$

Lägesvektorn $\mathbb{r}$ skrivs

$$\mathbb{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Vinkelhastigheten

$$\omega = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}$$

Vi får alltså

$$\omega \times \mathbb{r} = \hat{x}(\omega_y z - \omega_z y) + \hat{y}(\omega_z x - \omega_x z) + \hat{z}(\omega_x y - \omega_y x)$$

Obs cyklisk permutation

$$x \to y \to z \to x$$

Vidare är

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{r} \times (\omega \times \mathbb{r}) = \;& \hat{x}\left[y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)\right] + \\ & \hat{y}\left[z(\omega_y z - \omega_z y) - x(\omega_x y - \omega_y x)\right] + \\ & \hat{z}\left[x(\omega_z x - \omega_x z) - y(\omega_y z - \omega_z y)\right]\end{aligned}}$$

$$=\begin{bmatrix}(y^2+z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z \\ -xy\omega_x + (x^2+z^2)\omega_y - yz\omega_z \\ -xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z\end{bmatrix} = \mathbb{r}\times(\omega\times\mathbb{r}) = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{bmatrix}\omega$$

$\rightarrow$ I, tröghets-matris

Vi har att

$$\mathbb{L} = \int dm \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \omega$$ där $\int dm \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$ beskriver egenskaper för kroppen.

Vi betraktar nu elementen i tröghetsmatrisen:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ deviationsmoment, avvikelse

För diagonalelementen gäller

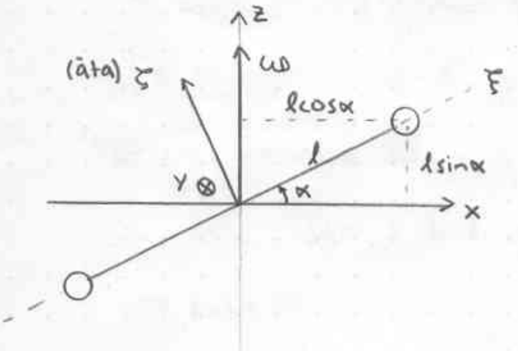
$$I_{xx} = \int dm \underbrace{\boxed{(y^2+z^2)}}_{(\text{Avstånd från x-axeln})^2} = \text{"tröghetsmoment m.a.p x-axeln"}$$

Deviationsmomenten gör alltid I symm.

Vi har alltså att

$$I_{xy} = I_{yx} = \int dm\, xy \quad \text{o.s.v}$$

Betrakna nu åter exemplet med den svängande staven:



Vi får här elementen

$$I_{xx} = 2m\ell^2\sin^2\alpha \qquad I_{xz} = 2m\ell^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$I_{yy} = 2m\ell^2$$

$$I_{zz} = 2m\ell^2\cos^2\alpha$$

Detta ger oss tröghetsmatrisen

$$I = 2m\ell^2\begin{bmatrix}\sin^2\alpha & 0 & \sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & 0 & \cos^2\alpha\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = I\omega = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix} = 2m\ell^2\omega\begin{bmatrix}-\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \\ \cos^2\alpha\end{bmatrix}$$

Som vi ser blir detta aningen omständiga beräkningar. Se istället till den matris I vi erhåller om vi räknar i ξ y ζ-systemet

$$I = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2\end{bmatrix}$$

Vi ser nu att I kan göras diagonal eftersom den är symmetrisk.

Man diagonaliserar I genom att välja ett $\perp$ koordinatsystem.

I det nya systemet gäller:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

egenvärden = "Huvudtröghetsmoment"

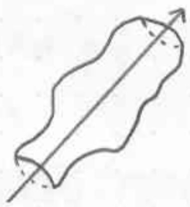
egenvektor = vektor längs koord. i det syst.

- Kring vilka axlar kan en kropp rotera utan $\mathbb{M}$?

 då ω konstant har vi inget $\mathbb{M} \Rightarrow \mathbb{L}$ konstant.

 $\omega \parallel \mathbb{L}$ då ω är egenvektor till I och ω pekar längs "huvudtröghetsaxeln".

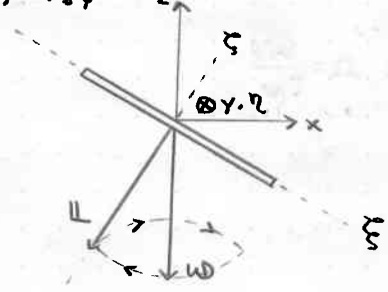
- Hitta huvudtröghetsaxlar



rotationssymmetri

- Bestäm $\mathbb{L}$, $\dot{\mathbb{L}} = \mathbb{M}$

Uppg 7/87



Sökt: $\mathbb{L}$, $\dot{\mathbb{L}} = \mathbb{M}$

Lösning: Vi har tröghetsmomenten

$I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{2}mr^2$

$I_{\xi\xi} = \frac{1}{4}mr^2$

(Inga dev. moment)

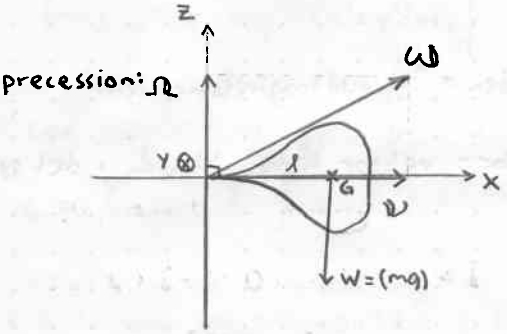
$\omega = -\omega\hat{z} = \omega\sin\alpha\,\hat{\xi} - \omega\cos\alpha\,\hat{\zeta}$

$\mathbb{L} = \frac{1}{4}mr^2\omega\sin\alpha\,\hat{\xi} - \frac{1}{2}mr^2\omega\cos\alpha\,\hat{\zeta}$

$\dot{\mathbb{L}} = \omega \times \mathbb{L} = \ldots = \frac{1}{8}mr^2\omega\sin 2\alpha\,\hat{\eta}$

Föreläsning 9

Reguljär precessionsrörelse



Vi har följande spinn och precession:

$$\boldsymbol{\nu} = \nu \hat{x}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$$

Tröghetsmatrisen i x, y, z - systemet

$$I_{xx} = I$$

$$I_{yy} = I_{zz} = I_0$$

Detta ger

$$\mathbb{L} = I\nu\hat{x} + I_0 \Omega \hat{z}$$

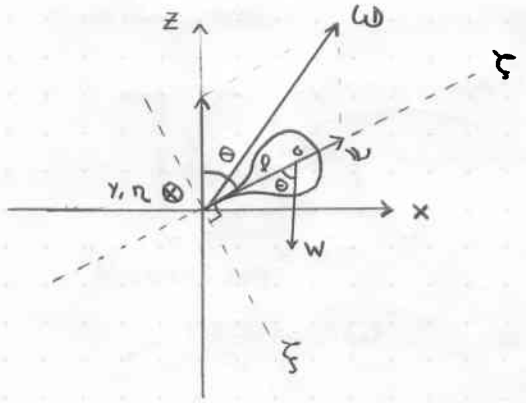
$$\dot{\mathbb{L}} = \Omega \times \mathbb{L} = I\Omega\nu\hat{y}$$

Moment från tyngdkraften

$$\mathbb{M} = W\ell\hat{y}$$

Detta stämmer om $I\Omega\nu = W\ell$ dvs $\Omega = \frac{W\ell}{I\nu}$

Godtycklig vinkel



Vi har nu

$\nu = \nu \hat{\zeta}$

$\Omega = \Omega \hat{z} = \Omega(\hat{\zeta} \cos\theta - \hat{\xi} \sin\theta)$

$\omega = -\Omega \sin\theta \, \hat{\xi} + (\nu + \Omega \cos\theta) \hat{\zeta}$

$\mathbb{L} = -I_0 \Omega \sin\theta \, \hat{\xi} + I (\nu + \Omega \cos\theta) \hat{\zeta}$

$\dot{\mathbb{L}} = \Omega \times \mathbb{L} = \hat{\eta}((-I_0 \Omega^2 \cos\theta \sin\theta) +$

$+ I\Omega \sin\theta \, (\nu + \Omega \sin\theta)) =$

$= \hat{\eta} \, \Omega \sin\theta \, (I\nu + (I - I_0) \Omega \cos\theta)$

Vi kontrollerar genom att låta $\theta = 0 \Rightarrow \dot{\mathbb{L}} = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ok!

Jämför detta med

$\mathbb{M} = W l \sin\theta \, \hat{y}$

$\dot{\mathbb{L}} = \mathbb{M}$?

$W l = \Omega \, (I\nu + (I - I_0) \Omega \cos\theta)$

där $\nu = \frac{W l}{\Omega I} + \frac{I_0 - I}{I} \Omega \cos\theta$

Reguljär precession utan vridande moment

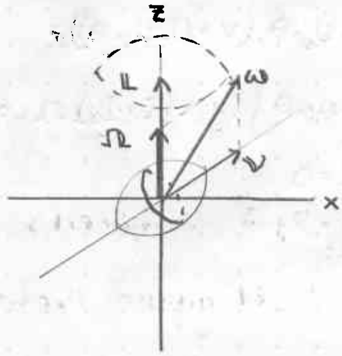
$$\nu = \frac{I_0 - I}{I}\Omega\cos\theta$$

$$\Omega = \frac{I\nu}{(I_0 - I)\cos\theta} = \frac{\nu}{\left(\frac{I_0}{I} - 1\right)\cos\theta}$$

Vi tar $\nu > 0$

Med $I_0 > I$ fås $\Omega > 0$, $I_0 < I$: $\Omega < 0$

Betrakta figuren nedan:

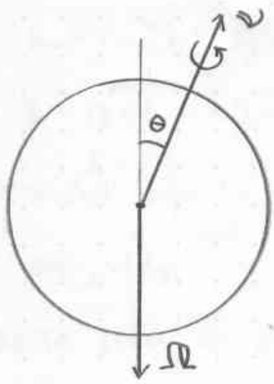


$$\mathbb{L} = I(\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta} - I_0\Omega\sin\theta\,\hat{\xi}$$

Projicering på $\hat{x}$-axeln ger:

$$I\cancel{\sin\theta}(\nu + \Omega\cos\theta) - I_0\Omega\cancel{\sin\theta}\cos\theta = \underline{\underline{0}}$$

Ex. Jordklotet



$$I_0 < I \Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{I_0}{I} - 1}_{\approx -\frac{1}{300}}} < 0$$

Nu är θ så liten vinkel så att avståndet mellan axlarna i verkligheten motsvarar runt 10 m.

Vi gör därför approximationen $\cos\theta \approx 1$

Obs. Figurens θ är överdriven.

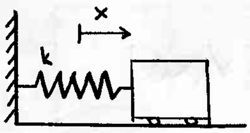
Vi ser att

$$|\Omega| \approx |\nu| \frac{1}{\frac{1}{300}\cdot 1} \approx 300\nu$$

$$\frac{2\pi}{\Omega} \approx 24\,\text{h}, \quad \frac{2\pi}{\nu} \approx 300 \text{ dagar}$$

Föreläsning 10

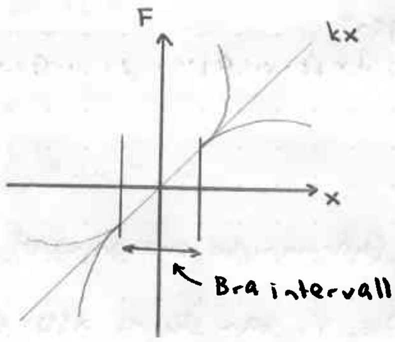
Vibrationer



$x=0$ då fjädern är ospänd

"Hockes lag"

För att lättare kunna beräkna svängningar förenklar man problemet till att betrakta små vibrationer kring fjäderns jämviktsläge.



Grafen åskådliggör att fjäderkonstanten multiplicerad med fjäderns förlängning, ändras linjärt på ett litet intervall kring jämviktsläget. Vi idealiserar.

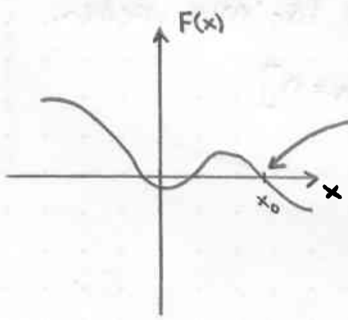
Rörelseekvation

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Nedan visar vi det en-dimensionella fallet för rörelse:

- Stabilt jämviktsläge $(x = x_0)$



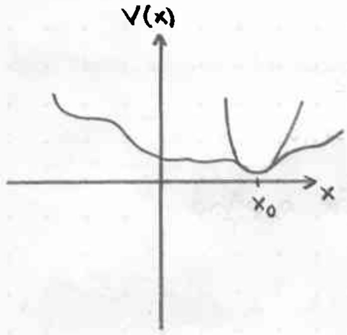
$F(x) = 0 - k(x-x_0) + O((x-x_0)^2)$ Taylorutveckling

Om vi går tillräckligt nära $F(x)$

Vi har rörelseekvationen

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0)$$

Linjär ekvation med analytisk lösning



Om vi istället har en andragradskurva

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + V(x_0)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

där $\frac{k}{m} = \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ med dim: $(\text{tid})^{-1}$

kallas normal vinkelfrekvens

Att lösa denna homogena diff. ekv. görs genom den karakeristiska ekvationen $r^2 + \omega_n^2 = 0$ med lösningen $r = \pm i\omega_n$

Detta ger den allmänna lösningen:

$$x(t) = A_+ e^{i\omega_n t} + A_- e^{-i\omega_n t}$$

Vi skriver om uttrycket

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$ (harmoniska svängningar)

Ansats: $x(t) = e^{rt}$

Obs. Vi kan skriva $x(t) = C\sin(\omega_n t + \psi)$ sin(a+b)

Detta är en linjär ekvation vilket ger linjärkombinerbara lösningar.

$$\dot{x} = re^{rt}$$

$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}$$

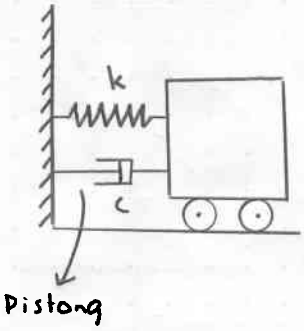
Att vi har två parametrar i lösningen $\Leftrightarrow$ 2 begynnelsevillkor

Dimensionsfull parameter ω_n

$\Rightarrow$ samma kvalitativa beteende för alla värden.

[dimensionslös tid $\tau = \omega_n t$ $\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0$]

Dämpade svängningar



När vi nu utöver fjädern även har en dämpande faktor får vi kraften

$$F = -kx - \boxed{c}\dot{x}$$

$\boxed{c} \to$ linjär dämpkraft

Detta ger rörelseekvationen

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad \text{dvs.}$$

$$\ddot{x} + \boxed{\frac{c}{m}}\dot{x} + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0$$

$\frac{c}{m} \to$ dim: $(\text{tid})^{-1}$ $\qquad \frac{k}{m} \to \omega_n^2$

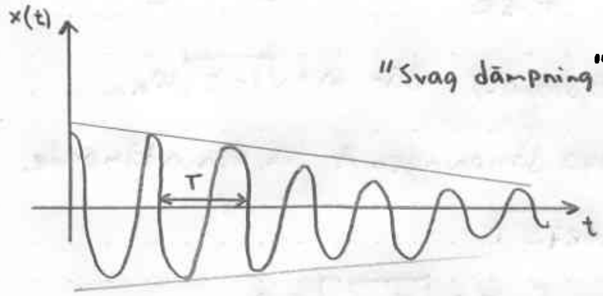
Vi byter beteckningar

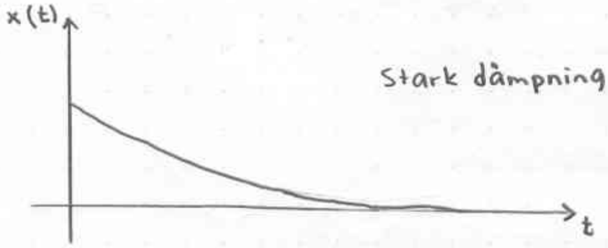
$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$$

$$\frac{c}{m} = 2\boxed{\zeta}\omega_n \qquad \text{där } \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

$\boxed{\zeta} \to$ dim. lös

För olika ζ får vi olika beteenden på svängningen.





Vi har följande differentialekvation

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n x = 0$$

Ansats:

$$x(t) = e^{rt}$$

$$r^2 + 2\zeta\omega_n r + \omega_n^2 = 0$$

$$r = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = \omega_n\left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]$$

Vi har följande fall:

Då $0 \leq \zeta < 1$: $\zeta^2 - 1 < 0$

$$r = \omega_n\left[-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right]$$ ger <u>svag</u> dämpning

Då $\zeta > 1$: $\zeta^2 - 1 > 0$

$$r = \omega_n\left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta - 1}\right]$$ ger <u>stark</u> dämpning

För att betrakta situationerna bättre, sätter vi in r i den allmänna lösningen:

Vi börjar med svag dämpning:

$$x(t) = Ae^{[-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}]\omega_n t} + Be^{[-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}]\omega_n t} =$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \quad \text{där } \omega = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$

Vi observerar att den svaga dämpningen är lik den odämpade.

Nu till den starkt dämpade:

2 reella rötter $r_{1,2} = \omega_n\left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta - 1}\right] < 0$

exponentiellt avtagande

$$x(t) = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}$$

<u>Ex</u> $\zeta >> 1$:

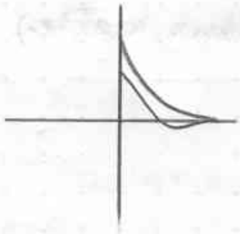
$$\frac{r_1}{\omega_n} = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\left(1 - \sqrt{1 - \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{\zeta^2}}}_{0}}\right) \approx -\zeta\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2\zeta^2}\right)\right) = -\frac{1}{2\zeta} \rightarrow 0^-$$

$$\frac{r_2}{\omega_n} \rightarrow -\infty$$

Ett speciellt fall får vi då $\zeta = 1$.

Detta kallas kritisk dämpning.

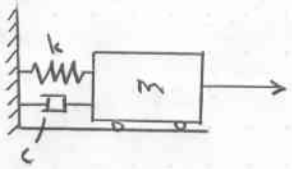
Vi har följande:



$r_1 = r_2 = r = -\zeta\omega_n$

$x(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Föreläsning 11



$F(t) = F_0 \sin \omega t$ (Alla $F(t)$ kan skrivas som summan av sådana krafter)

Låt $c = 0$

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

Nu får vi alltså en differentialekvation med både en homogen- och en partikulärlösning

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ där $x_h(t)$ är lösningen till den homogena ekv.

Betrakta partikulärlösningen

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

Ansats:

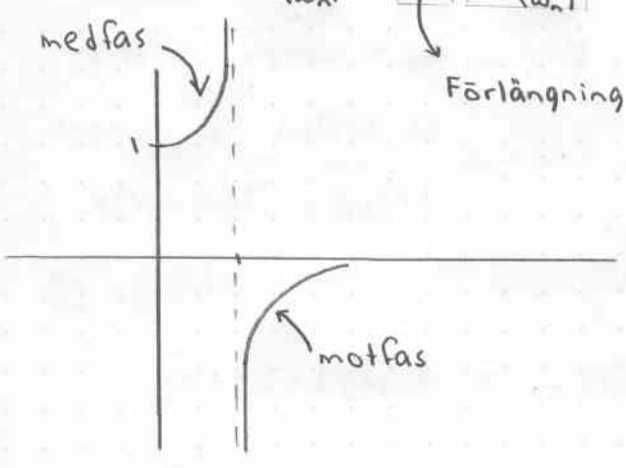
$x_p(t) = A \sin \omega t$ ($|A|$ amplitud)

Vi får

$$(-\omega^2 A \cancel{\sin \omega t} + \omega_n^2 A \cancel{\sin \omega t}) = \frac{F_0}{m}\cancel{\sin \omega t}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{F_0/k}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \boxed{\frac{F_0}{k}} \cdot \boxed{\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \rightarrow \text{Förstärkning}$$

$\frac{F_0}{k}$: Förlängning vid konstant kraft F_0



Vi lägger nu till dämpning dvs $c > 0$

$$\ddot{x} + \underbrace{\boxed{\frac{c}{m}}}_{2\zeta\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\boxed{\frac{k}{m}}}_{\omega_n^2}x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

Vi söker partikulärlösningen

Ansätt

$x_p(t) = A\sin(\omega t - \phi)$ där ϕ är fasförskjutningen

$\dot{x}_p(t) = A\omega\cos(\omega t - \phi)$

$\ddot{x}_p(t) = -A\omega^2\sin(\omega t - \phi)$

Insättning ger

$$-A\omega^2\sin(\omega t - \phi) + 2\zeta\omega_n\omega A\cos(\omega t - \phi) + \omega_n^2 A\sin(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t - \phi + \phi)$$

(betrakta $\sin(\underbrace{\omega t - \phi}_{a} + \underbrace{\phi}_{b})$ som $\sin(a+b)$)

$$= \frac{F_0}{m}\left(\sin(\omega t - \phi)\cos\phi + \cos(\omega t - \phi)\sin\phi\right)$$

Dela upp ekvationen i två delar:

sin: $(-\omega^2 + \omega_n^2)A = \frac{F_0}{m}\cos\phi$

cos: $2\zeta\omega_n\omega A = \frac{F_0}{m}\sin\phi$

kvadrera båda leden i ekvationerna

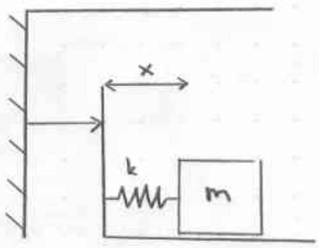
$$\begin{cases} A^2\left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2\right] = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \\ \tan\phi = \dfrac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{cases}$$

Amplituden A blir

$$A = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Vibrerande vägg

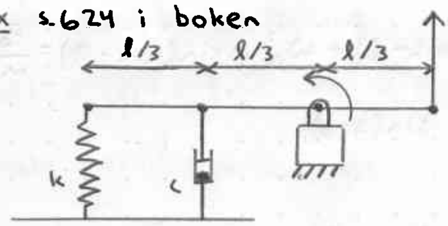


Nu gäller följande ekvationer

$$m(\dot{x}+\dot{s})=-kx$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=-\ddot{s}-\frac{k}{m}s=\omega^2 s_0 \sin\omega t$$

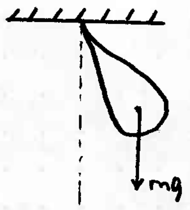
Ex s.624 i boken



Vi har nu

$$I\ddot{\theta}=-k\theta\cdot\frac{2l}{3}\cdot\frac{2l}{3}-c\dot{\theta}\frac{l}{3}\cdot\frac{l}{3}+F_0\cos\omega t\cdot\frac{l}{3}$$

Ex



$$I\ddot{\theta}=mgl\sin\theta$$

$\ddot{\theta}=\frac{mgl}{I}\sin\theta=0$ För små svängningar $\approx\theta$

$$\omega_n^2=\sqrt{\frac{mgl}{I}}$$