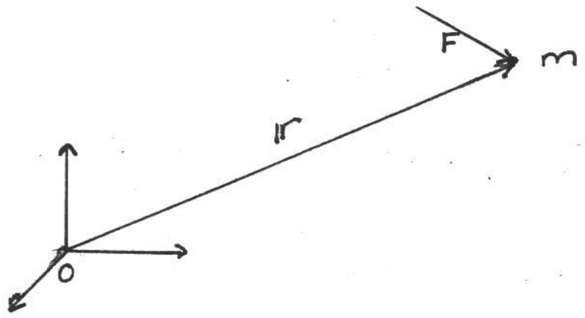
MEKANIK B

2002

Repetition av partikelmekanik

Vi vill beskriva rörelser för en partikel med massan m.

Vi inför en fix punkt O (origo)



ortsvektor $\mathbb{r}$

hastighet $\mathbb{v} = \dot{\mathbb{r}}$

acceleration $\mathbb{a} = \dot{\mathbb{v}} = \ddot{\mathbb{r}}$

Den yttre påverkan på partikeln modelleras med en kraft F som angriper i punkten med ortsvektorn $\mathbb{r}$.

Då gäller Newtons andra lag

$$\boxed{\mathbb{F} = m\mathbb{a}}$$

Vi inför partikelns <u>rörelsemängd</u> $\mathbb{G} = m\dot{\mathbb{r}}$

Vi har då att $\mathbb{F} = \dot{\mathbb{G}}$ (om m är konstant)

När partikeln rör sig längs med någon given kurva från punkten a till punkten b uträttar $\mathbb{F}$ arbetet

$$U = \int_a^b \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$$

Vi inför partikelns kinetiska energi

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbb{r}} \dot{\mathbb{r}}$$

Man kan då visa att

$U = T_b - T_a$ (ändringen av partikelns kinetiska energi)

Ibland delar vi upp $\mathbb{F}$ enligt

$$\mathbb{F} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{måste vara konservativ}}}{\mathbb{F}_{cons}} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{godtycklig}}}{\hat{\mathbb{F}}}$$

För en konservativ kraft gäller att

$$\int_a^b \mathbb{F}_{cons} \cdot d\mathbb{r} = -V_b + V_a \quad \text{(oberoende av vägen)}$$

där V_b och V_a är den potentiella energin för $\mathbb{F}$ i punkterna a och b. Det finns alltså en potentiell energifunktion $V(\mathbb{r})$ som uppfyller $\nabla V(\mathbb{r}) = -\mathbb{F}_{cons}$

Vi får då att

$$\int_a^b \hat{\mathbb{F}} \cdot d\mathbb{r} = E_b - E_a \quad \text{ändring av total mekanisk energi}$$

$E = T + V$ (kinetisk + potentiell)

Slutligen inför vi vridmomentet m a p O.

$$\mathbb{M}_o = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$$

och partikelns rörelsemängdsmoment m a p O

$$\mathbb{H}_o = \mathbb{r} \times m\mathbb{v}$$

Man finner då att

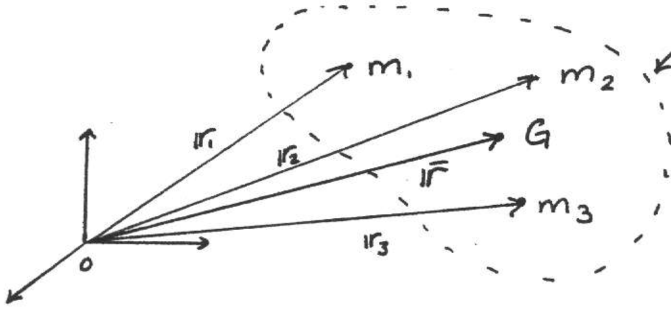
$$\dot{\mathbb{H}}_o = \underbrace{\dot{\mathbb{r}} \times m\mathbb{v}}_{=0} + \mathbb{r} \times m\mathbb{a} = \mathbb{r} \times \mathbb{F} = \mathbb{M}_o$$

$$\boxed{\mathbb{M}_o = \dot{\mathbb{H}}}$$

För en <u>isolerad</u> partikel som inte utsätts för någon kraft är alltså $\mathbb{G}$, T och $\mathbb{H}_o$ bevarade (konstanta i tiden).

System av partiklar

Vi har ett system av n partiklar med massor $m_1, \ldots, m_n$ och ortsvektorer $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$



systemgräns

(det är viktigt att noga definiera exakt vad som ingår i systemet)

Partikelmekanikens lagar gäller naturligtvis för de enskilda partiklarna. Men vi vill även kunna beskriva systemet som en helhet.

Systemets totala massa är $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Systemets tyngdpunkt G definieras av sin ortsvektor

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

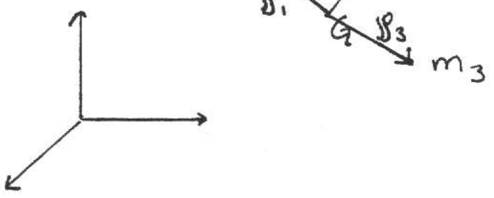
Vi inför de enskilda partiklarnas ortsvektorer $\boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_n$ relativt tyngdpunkten G. Det gäller att

$$\mathbf{r}_i = \bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}_i$$

Dessa $\boldsymbol{\rho}_i$ har egenskapen att

$$\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}}) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \sum_i m_i \cdot \bar{\mathbf{r}} =$$

$$m\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}} \sum_i m_i = m\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}} m = 0$$



Systemets rörelsemängd är

$$\mathbf{G} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}(m\bar{\mathbf{r}}) = m\bar{\mathbf{V}}$$

där $\bar{\mathbf{V}}$ är tyngdpunktens hastighet.

Newtons andra lag för partikel i säger att

$$\underbrace{\left(\overset{}{\underset{\uparrow}{\mathbf{F}_i}} + \underset{\nwarrow}{\sum_j \mathbf{f}_{ij}}\right)} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

kraften på partikel i från källor utanför systemet.

kraften på partikel i från partikel j.

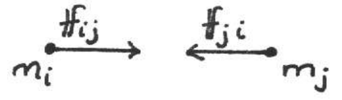
totala kraften på partikel i.

Vi summerar över i:

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Men Newtons tredje lag säger att

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$$



Vi får då att

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = -\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ji} = -\sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ij} =$$

$$= -\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} \Rightarrow \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = 0$$

och $\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i \mathbf{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}(m\bar{\mathbf{r}}) = m\bar{\mathbf{a}}$

så vi finner att

$$\underset{\nearrow}{\mathbf{F}} = \underset{\uparrow}{m}\, \underset{\nwarrow}{\bar{\mathbf{a}}}$$

totala yttre kraften på systemet

totala massan

systemets tyngdpunkts acceleration

Alternativt kan vi skriva

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$$

Arbete och energi

Summan av de inre krafternas uträttade arbete är noll.

Det gäller alltså att summan av de yttre krafternas uträttade arbete är lika med ändringen i systemets totala kinetiska energi T.

Precis som tidigare kan vi införa en potentiell energi för konservativa krafter.

Vad är T för ett system?

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \cdot (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \Big(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \underbrace{2\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i}_{=0} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \Big)$$

$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \nwarrow$$

kinetisk energi pga tyngdpunktens rörelse

kinetisk energi pga partiklarnas rörelse relativt tyngdpunkten.

Systemets rörelsemängdsmoment map O är

$$\mathbf{H}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

Vi tar tidsderivatan och får

$$\dot{\mathbf{H}}_0 = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{M}_{0i} = \mathbf{M}_0$$

kraften $\mathbf{F}_i$'s vridmoment map 0

totala vridmomentet map O.

Systemets rörelsemängd map G:

$$\mathbf{H}_G = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)$$

$$= \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

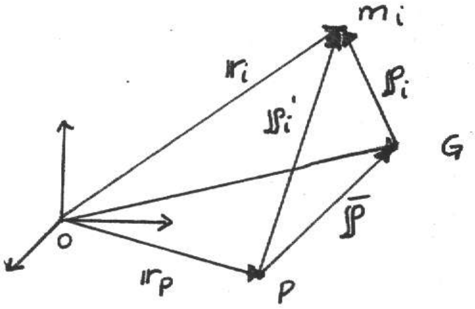
Vi tar tidsderivatan och får

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \sum_i (\underbrace{\dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i}_{=0} + \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i = M_G$$

Slutligen beräknar vi rörelsemängdsmomentet map en godtycklig punkt P som i allmänhet accelererar. P har ortsvektorn $\mathbf{r}_P$

$$\mathbf{H}_P = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i' \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

$$= \dots = \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G$$



rörelsemängdsmomentet map P för en partikel i G med massan m och hastighet $\bar{\mathbf{v}}$.

rörelsemängsmomentet map G

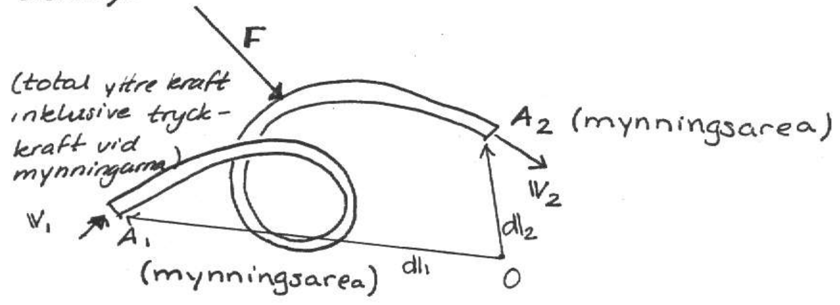
Vi har vridmomentet map P

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{F} \quad \text{så att}$$

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}} \neq \dot{\mathbf{H}}_P \quad \text{OBS!}$$

Stationärt massflöde

Tillämpbart på t.ex turbiner, pumpar, jetmotorer, vattenslangar... (maskiner med en strömmande fluid) Vi inskränker oss till det stationära fallet (situationen är konstant i tiden).

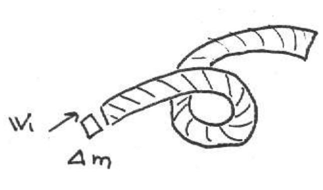


För en inkompressibel fluid (t.ex vatten) gäller att

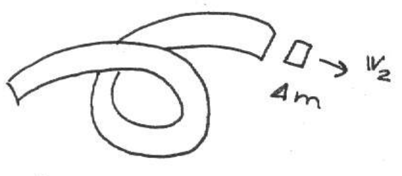
$\rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho v_2 A_2 = m' =$ massflöde/tidsenhet

↑
fluidens densitet

Vi vill ställa upp Newtons andra lag för systemet. T.ex har vi kanske ett statikproblem där accelerationen är noll och vi söker den totala yttre kraften F som behövs för jämvikt. Vi betraktar nedanstående system vid tidpunkterna t och $t + \Delta t$.



tiden t



tiden $t + \Delta t$

Vi betraktar alltså en given mängd materia och kan använda Newtons andra lag. Ändringen i systemets rörelsemängd $\Delta \mathbf{G} = \mathbf{G}_{efter} - \mathbf{G}_{före} = \Delta m \cdot \mathbf{v}_2 - \Delta m \cdot \mathbf{v}_1 =$

$= \Delta m (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$

Vi dividerar med Δt och tar gränsen $\Delta t \to 0$. Vi får då att den yttre kraften ges av

$$\mathbb{F} = \dot{\mathbb{G}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbb{G}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} (\mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_1) = m'(\mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_1)$$

Obs att m' är massflöde per tidsenhet. Vi skriver inte $\dot{m}$ eftersom det inte är tidsderivatan av någon storhet m.

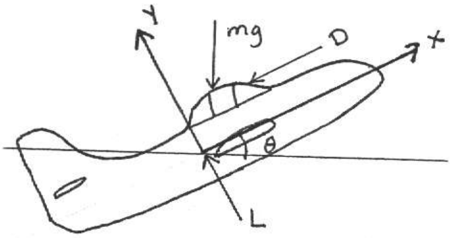
Om vi inför en fix punkt O så kan vi även studera momentjämvikt kring O.

$$\underset{\uparrow}{\mathbb{M}_O} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbb{H}_O}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbb{H}_{\text{efter, }O} - \mathbb{H}_{\text{före }O} \right) =$$

yttre krafters
vridmoment
map O.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbb{d}_2 \times \Delta m \mathbb{v}_2 - \mathbb{d}_1 \times \Delta m \mathbb{v}_1 \right) = m' \left(\mathbb{d}_2 \times \mathbb{v}_2 - \mathbb{d}_1 \times \mathbb{v}_1 \right)$$

Sample problem 4/8



Flygplan med massa m flyger med konstant hastighet V i vinkel θ från horisontalriktningen. Det påverkas av lyftkraft L vinkelrät mot rörelseriktningen, tyngden mg (vertikalt nedåt) och luftmotståndet D (motriktad rörelsen). Det drivs av en jetmotor som tar in luftmassan m'_a per tidsenhet. Bränsleförbrukningen är m'_f per tidsenhet. Avgasmassan $m'_g = m'_a + m'_f$ per tidsenhet sänds ut med hastigheten u relativt flygplanet. Ställ upp rörelseekvationen för flygplanet!

Vi inför ett origo 0 som medföljer flygplanet och axlar enligt figuren. Jämviktsvillkor i y-led är

$$L - mg\cos\theta = 0$$

Rörelseekvation i x-led:

Vi har två flöden, bränsle och luft.

Bränslets ursprungliga hastighet är 0 (relativt flygplanet)

" slut " $-u$

Luftens ursprungliga hastighet är $-v$ (relativt flygplanet)

" slut " $-u$

Vi får nu att

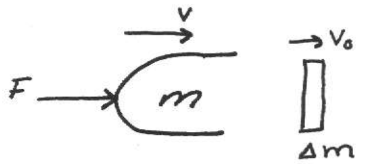
$$\underbrace{-D - mg\sin\theta}_{\text{total yttre kraft på systemet}} = m_f'(-u-0) + m_a'(-u-(-v)) \quad \Leftrightarrow$$

$$D + mg\sin\theta = m_f' u + m_a'(u-v) = m_g' - m_a' v$$

Variabel massa

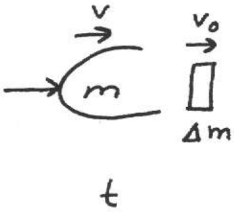
Tillämpbart på raketer mm.

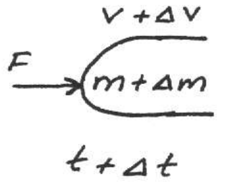
Vi betraktar en kropp med massa m (tidsberoende) som rör sig med hastighet v under inverkan av en yttre kraft F.



Kroppens massa m ökar eftersom den hinner upp och "sväljer" partiklar med ursprunglig hastighet $v_0 < v$.

Vi ställer upp rörelseekvationen genom att betrakta systemet vid två tidpunkter t och $t+\Delta t$





$$F = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta G}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(G_{efter} - G_{före}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left((m+\Delta m)(v+\Delta v) - mv - \Delta m v_0\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(m\Delta v + \Delta m v - \Delta m v_0 + \underbrace{\Delta m\Delta v}_{\to 0}\right)$$

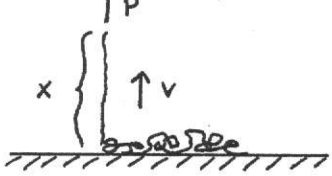
$$= m\dot{v} + \dot{m}(v-v_0)$$

dvs

$$\boxed{\underset{\substack{\nearrow\\ \text{yttre kraften}}}{F} = m\dot{v} + \dot{m}\underset{\substack{\uparrow\\ v-v_0}}{u}}$$

<u>Sampleproblem 4/9</u>

En kedja med längden L och massan ρ per längdenhet ligger i en hög på ett bord. Man lyfter en ände vertikalt med den konstanta hastigheten v. Hur stor kraft P måste man använda (som funktion av ändens höjd x över bordet)



Vi betraktar den upplyfta delen av kedjan. Des massa är ρx. Den påverkas av den yttre kraften $F = P - \rho x g$

Massökningen per tidsenhet är $\dot{m} = \rho v$. Massökningen sker genom att partiklar med ursprunglig hastighet $v_0 = 0$ ändrar sin hastighet till v. Den relativa hastigheten är alltså $u = v - v_0 = v$ Formeln ovan ger att

$P - \rho x g = \rho x \dot{v} + \rho v v = \rho v^2$

Vi får att $P = \rho g x + \rho v^2$

P = tyngdkraft på kedjan + kraft för att accelerera länkar på bordet.

Kan vi göra ett energiresonemang?

När kedjan ligger på bordet är potentiell energi $V_1 = 0$

" kinetisk " $T_1 = 0$

När sista länken lyfter är potentiell energi $V_2 = \rho L \cdot g \frac{L}{2} = \frac{\rho g L^2}{2}$

kinetisk energi $T_2 = \frac{1}{2} \rho L v^2$

Total ändring av mekanisk energi $\Delta E = \frac{1}{2} \rho (L V^2 + g L^2)$

Men kraften P har uträttat arbetet

$$U = \int_0^L P\,dx = \int_0^L (\rho g x + \rho v^2)\,dx = \frac{1}{2} \rho g L^2 + \rho v^2 L$$

Vi ser att energiförlusten är

$U - \Delta E = \frac{1}{2} \rho v^2 L$ (värme, ljud,...)

inelastisk stöt mellan upplyft kedja och länk som precis lyfter, därav energiförlusten.

Stelkroppskinematik i planet

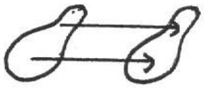
Stel kropp är ett modellbegrepp. En verklig kropp kan betraktas som stel i vissa tillämpningar men inte andra.

Definition Ett system av partiklar rör sig som en stel kropp om det inbördes avståndet mellan partiklarna är oförändrat under rörelsen.

För ett godtyckligt system av partiklar måste vi bestämma de individuella partikelrörelserna.

För en stel kropp kan den mest allmänna rörelsen bestämmas som en kombination av en translation och en rotation.

Vi börjar med plan rörelse. Vi urskiljer olika specialfall:



translation längs
en rät linje

translation längs
en kurva

se partikelmekanik
del A

rotation kring
en fix axel

allmänna fallet
(translation + rotation)

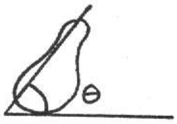
Rotationsrörelse

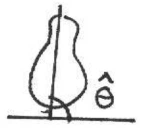
Vi beskriver en stel kropps rotation genom att ange vinkeln θ mellan någon linje i kroppen och en fix referenslinje.

Vi inför vinkelhastigheten $\omega = \dot{\theta}$ och vinkelaccelerationen $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Observera likheten med läge, hastighet och acceleration (s, v, a) för endimensionell rörelse.

Tex om α konstant har vi

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases}$$

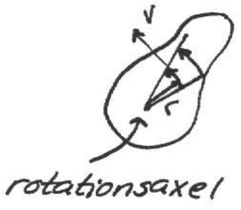




Jämför med

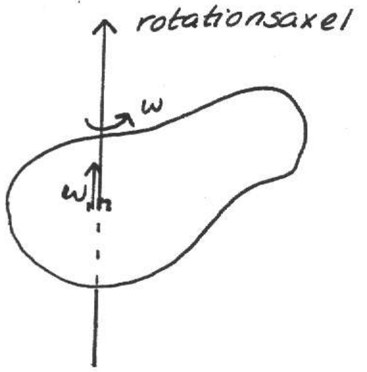
$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases} \qquad a = \text{konstant}$$

Rotation kring en fix axel



Materiepunkterna rör sig på koncentriska cirklar runt rotationsaxeln. Vi inför avståndet r från en materiepunkt till rotationsaxeln.

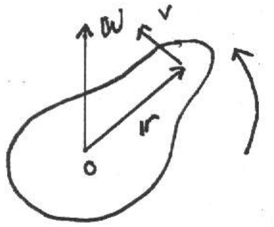
Materiepunkten har en tangentiell hastighet med storleken $v = \omega r$. Dess acceleration har i allmänhet en tangentialkomponent $a_t = \alpha r$ och en normalkomponent $a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$ riktad in mot rotationsaxeln.



Vi inför vinkelhastighetsvektorn $\boldsymbol{\omega}$. Dess storlek är $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ Dess riktning ges av rotationaxeln och "högerhandsregeln". (Tummen i $\boldsymbol{\omega}$-riktningen ⇒ fingrar i rotationsriktning)

Betraktad från spetsen av $\boldsymbol{\omega}$ så roterar kroppen i positiv led (motsols).

Vi inför nu en punkt 0 på rotationsaxeln.



En materiepunkt med ortsvektor $\mathbf{r}$ har då hastigheten

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Vi kan nu enkelt kontrollera uttrycken för materiepunktens acceleration.

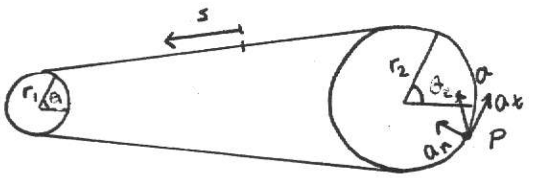
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

$\perp$ $\boldsymbol{\omega}$ och $\mathbf{r}$
$\parallel$ $\boldsymbol{\omega}$ eller motriktad

riktad in mot axeln

Exempel



Bestäm beloppet av P:s acceleration uttryckt i vinkelhastigheten ω_1 och vinkelaccelerationen α_1 för det lilla hjulet i ett visst ögonblick. Remmarna slirar inte.

Vi inför vinklarna θ_1 och θ_2 samt en linjär koordinat s enligt figuren. Det gäller att

$$s = r_1\theta_1 \quad \text{och} \quad s = r_2\theta_2$$

dvs

$$\theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\theta_1$$

Derivering ger att

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 = \frac{r_1}{r_2}\dot{\theta}_1 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1$$

och att

$$\alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\alpha_1$$

Punkten P har en tangentiell acceleration $a_t = r_2\alpha_2 = r_1\alpha_1$

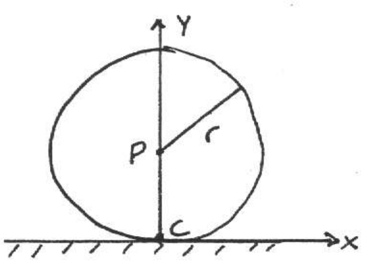
" normal " $a_n = r_2\omega_2^2 = \frac{r_1^2}{r_2}\omega_1^2$

Den totala accelerationen har beloppet

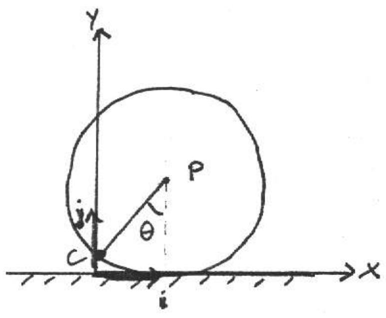
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(r_1\alpha_1)^2 + \left(\frac{r_1^2}{r_2}\omega_1^2\right)^2}$$

Exempel

Ett hjul med radie r rullar utan att glida. Uttryck läge, hastighet och acceleration för punkterna P, C i termer av $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$.



vid t=0



vid t>0

När hjulet har vridits vinkeln θ så har det rullat sträckan $s = r\theta$. Vi får då ortsvektorerna för P och C:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_P = \mathbf{i}\, r\theta + \mathbf{j}\, r \\ \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_P - \mathbf{i}\, r\sin\theta - \mathbf{j}\, r\cos\theta \end{cases}$$

$$= \mathbf{i}\, r(\theta - \sin\theta) + \mathbf{j}\, r(1-\cos\theta)$$

Derivering ger nu hastigheterna

$$\begin{cases} \mathbf{v}_P = \mathbf{i}\, r\dot{\theta} \\ \mathbf{v}_C = \mathbf{i}\, r(1-\cos\theta)\dot{\theta} + \mathbf{j}\, r\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

och accelerationerna

$$\begin{cases} \mathbf{a}_P = \mathbf{i}\, r\ddot{\theta} \\ \mathbf{a}_C = \mathbf{i}\, r(\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + (1-\cos\theta)\ddot{\theta}) + \mathbf{j}\, r(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}) \end{cases}$$

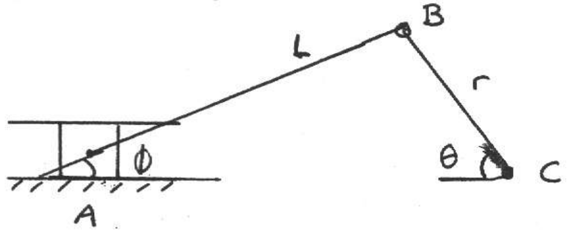
Då $\theta = 2n\cdot\pi$:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_C = 0 \\ \mathbf{a}_C = \mathbf{j}\, r\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

Då $\theta = (2n+1)\pi$:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_C = 2\mathbf{i}\, r\dot{\theta} \\ \mathbf{a}_C = 2\mathbf{i}\, r\ddot{\theta} - \mathbf{j}\, r\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

Exempel 5.54



Bestäm vinkelhastigheten ω_{AB} och vinkelaccelerationen α_{AB} för stången AB.

Sinussatsen ger att $\frac{\sin\phi}{r} = \frac{\sin\theta}{L}$

dvs

$$\phi = \arcsin\left(\frac{r}{L}\sin\theta\right)$$

Den sökta vinkelhastigheten är

$$\omega_{AB} = \dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{L}\sin\theta\right)^2}}\frac{r}{L}\cos\theta\,\dot{\theta}$$

och vinkelaccelerationen

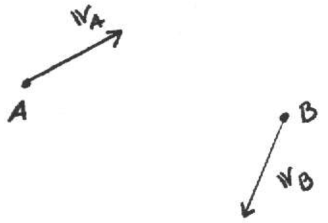
$$\alpha_{AB} = \dot{\omega}_{AB} = -\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{r}{L}\sin\theta\right)^2\right)^{-3/2}(-2)\frac{r}{L}\sin\theta\frac{r}{L}\cos\theta\,\dot{\theta}\frac{r}{L}\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{L}\sin\theta\right)^2}}\left(\left(-\frac{r}{L}\right)\sin\theta\,\dot{\theta}^2+\frac{r}{L}\cos\theta\,\ddot{\theta}\right)$$

$$= \frac{r}{L}\dot{\theta}^2\sin\theta\quad\frac{r^2/L^2-1}{\left(1-\left(\frac{r}{L}\sin\theta\right)^2\right)^{3/2}}$$

Relativ hastighet

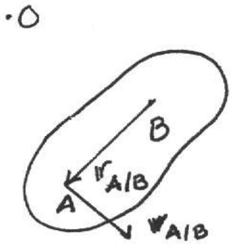
Betrakta två partiklar A och B



Man kan alltid skriva

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{A's hast}\\ \text{rel. en}\\ \text{fix pkt O.}}}{\mathbf{v}_A} = \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{B's hast}\\ \text{rel O.}}}{\mathbf{v}_B} + \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{A's hast}\\ \text{rel B}}}{\mathbf{v}_{A/B}}$$

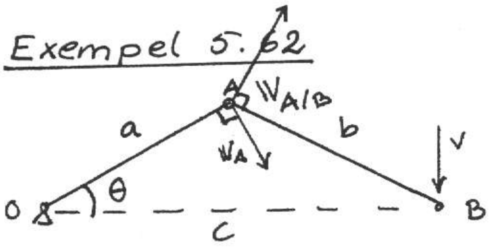
Antag nu att A och B ingår i samma stela kropp.



A's rörelse relativt B är då en cirkelrörelse med radie $r_{A/B} = |\mathbf{r}_{A/B}|$ och vinkelhastighet lika med kroppens vinkelhastighet ω. Det gäller att

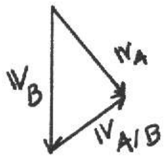
$\mathbf{v}_{A/B} = \omega \times \mathbf{r}_{A/B}$ Obs att $\mathbf{v}_{A/B} \perp \mathbf{r}_{A/B}$

Exempel 5.62



Bestäm $\dot{\theta}$!

Vi använder att $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ med beteckningar enligt teoriavsnittet.



Observera att $\mathbf{v}_A$ är vinkelrät mot OA

$\mathbf{v}_{A/B}$ är $\perp$ mot AB

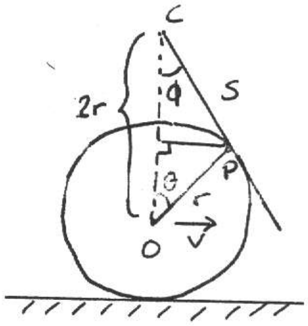
Hastighetstriangeln är likformig med OAB-triangeln.

Alltså gäller att

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{|\mathbf{v}_A|}{|\mathbf{v}_B|} = \frac{a}{c} \Rightarrow v_A = \frac{a}{c} v_B$$

vinkelhastigheten $\dot{\theta} = -\frac{v_A}{a} = -\frac{v_B}{c}$

Exempel 5.88



Hjulet rullar utan att glida åt höger med hastigheten v. Punkten P på hjulet glider därvid längs stången som vrider sig kring punkten C.

Bestäm stångens vinkelhastighet $\dot{\phi}$ i det ögonblick då $\theta = 30°$. Vi börjar med att bestämma ϕ och s i detta ögonblick.

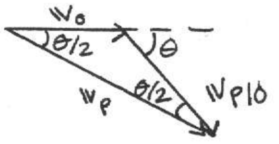
$$\phi = \arctan \frac{r \sin\theta}{2r - r\cos\theta} = \arctan \frac{1/2}{2-\sqrt{3}/2} = \arctan \frac{1}{4-\sqrt{3}} \approx 23{,}8°$$

$$s = \frac{2r - r\cos\theta}{\cos\phi} = r\,\frac{2-\sqrt{3}/2}{\cos\phi} = 1{,}24\,r$$

Vi skulle behöva känna hastigheten för en punkt A på stången. Vi väljer A så att den sammanfaller med P då $\theta = 30°$. Sedan använder vi att

$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{A/P}$ där i sin tur

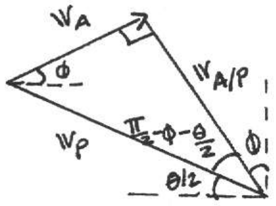
$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{P/O}$



Obs att $|\mathbb{v}_0| = |\mathbb{v}_{P/0}| = v$

så att

$$|v_P| = 2\,v\cos\frac{\theta}{2} \approx 1{,}93\,v$$



$$|\mathbb{v}_A| = |\mathbb{v}_P|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi-\frac{\theta}{2}\right) = 1{,}93v\cos\left(\phi+\frac{\theta}{2}\right) = 1{,}50\,v$$

Den sökta vinkelhastigheten blir

$$\dot{\phi} = \frac{v_A}{s} \approx 1{,}21\,\frac{v}{r}$$

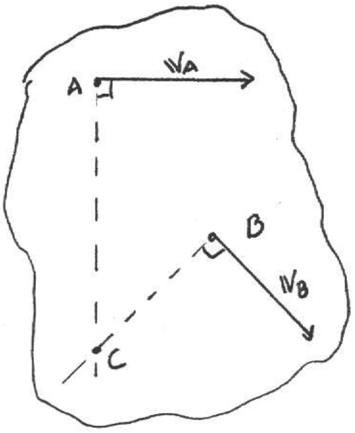
Momentan punkt i vila

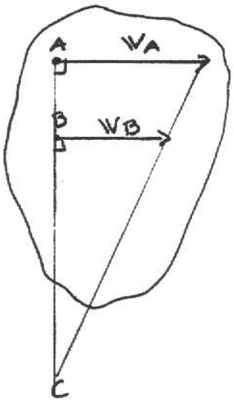
(Instantaneous center of zero velocity)

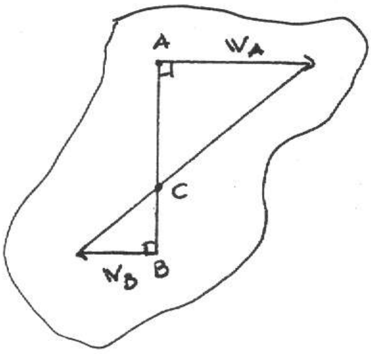
$$\mathbb{v}_A = \mathbb{v}_C + \mathbb{v}_{A/C}$$

Det skulle vara trevligt om vi kunde välja en punkt C i en stel kropp så att $\mathbb{v}_C = 0$. Det går, om inte kroppen utför en ren translationsrörelse.

Hur hittar man denna magiska punkt? Givet $\mathbb{v}_A$ och $\mathbb{v}_B$ för två punkter A och B i en stel kropp kan vi konstruera C:

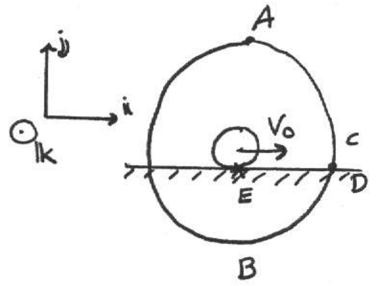


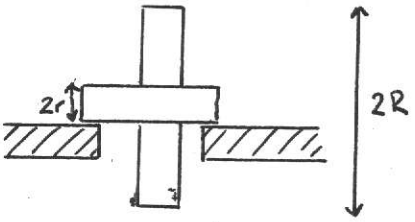




Detta gäller dock bara i ett visst ögonblick. Punkten C kommer att flytta sig med tiden (i allmänhet). Den beskriver därvid en kurva (space centroid) i rummet och en kurva (body centroid) i den stela kroppen.

Exempel 5.98





Axeln med tillhörande hjul rullar utan att glida med hastigheten v_0 åt höger. Bestäm hastigheterna för punkterna A, B, C, D. Punkten E är i momental vila. Hjulet har vinkelhastigheten

$$\omega = -\frac{v_0}{r}\mathbb{k}$$

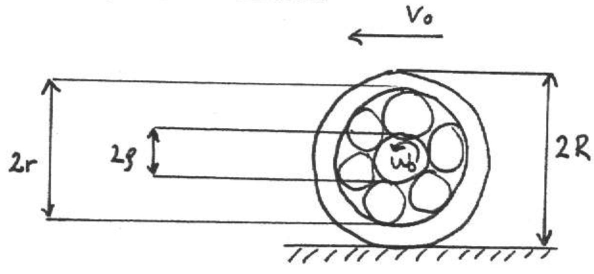
De sökta hastigheterna ges av

$$\mathbb{v}_A = \mathbb{v}_{A/E} = \omega \times \mathbb{r}_{A/E} = -\frac{v_0}{r}\mathbb{k} \times (r+R)\mathbb{j} = v_0\frac{r+R}{r}\mathbb{i}$$

$$\mathbb{v}_B = \ldots = -v_0\frac{R-r}{r}\mathbb{i}$$

$$\mathbb{v}_C = \ldots \qquad \mathbb{v}_D = \ldots$$

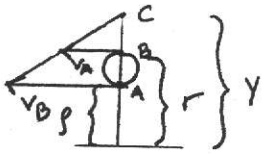
Exempel 5.116



Kullagret rullar utan att glida åt vänster med hastigheten v_0. Samtidigt roterar axeln med vinkelhastigheten ω_0 motsols

Bestäm kulornas vinkelhastighet ω (ingen glidning).

Inför ett medföljande koordinatsystem med origo O i axelns mittpunkt. Betrakta punkterna A och B på en kula. Vi söker punkten C "på kulan" som ligger stilla.



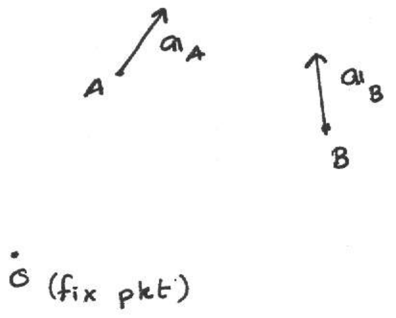
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{y-r}{y-\rho} \iff y = \frac{v_B r - v_A \rho}{v_B - v_A}$$

Den sökta vinkelhastigheten är

$$\omega = \frac{v_A}{y-r} = \frac{v_B - v_A}{r-\rho} = \frac{\omega_0 \rho - \frac{v_0}{R} r}{r-\rho}$$

Relativ acceleration

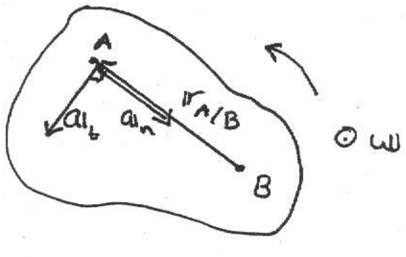
Två partiklar A och B



Vi kan skriva

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{A's acceleration} \\ \text{rel. O}}}{\mathbf{a}_A} = \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{B's acc} \\ \text{rel O}}}{\mathbf{a}_B} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{A's acc} \\ \text{rel B}}}{\mathbf{a}_{A/B}}$$

Om A och B ingår i samma $\overset{\text{stela}}{\vee}$ kropp så utför A en cirkelrörelse kring B med radie $r_{A/B} = |\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vektor från} \\ \text{B till A}}}{\mathbf{r}_{A/B}}|$ och vinkelhastigheten ω som är lika med kroppens vinkelhastighet. Då kan vi skriva



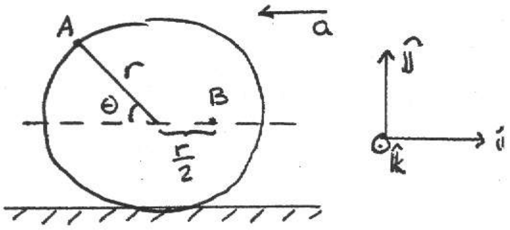
$$\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad \text{där}$$

$$\mathbf{a}_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kroppens vinkelacceleration}}}{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{r}_{A/B} \;,\quad \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) \quad \text{riktat från A till B}$$

Exempel 5/122

Hjulet rullar utan att glida.

Bestäm $\mathbf{v}_A$ och $\mathbf{a}_B$.



Vi inför enhetsvektorer $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ enligt figuren.

Hjulet har vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega} = -\frac{v}{r}\hat{\mathbf{k}}$

" vinkelaccelerationen $\boldsymbol{\alpha} = +\frac{a}{r}\hat{\mathbf{k}}$

Hjulets centrum O har hastigheten $\mathbf{v}_0 = V\mathbf{i}$

och accelerationen $\mathbf{a}_0 = -a\hat{\mathbf{i}}$

Nu kan vi beräkna hastigheten för A:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{A/0} \\
&= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/0} \\
&= \mathbf{v}\hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{v}{r}\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(-r\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + r\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) \\
&= \mathbf{v}\hat{\mathbf{i}} + v\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}\right) \\
&= v(1+\sin\theta) + v\cos\theta\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Accelerationen för B blir

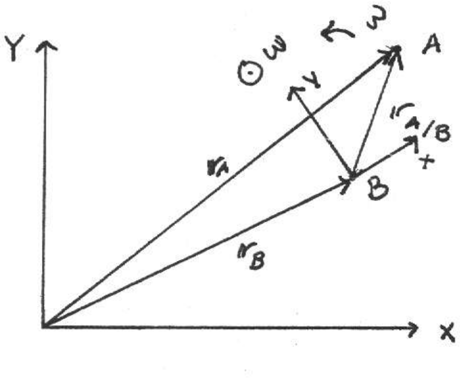
$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/0} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/0}) \\
&= -a\hat{\mathbf{i}} + \frac{a}{r}\hat{\mathbf{k}} \times \frac{r}{2}\hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{v}{r}\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(\left(-\frac{v}{r}\hat{\mathbf{k}}\right) \times \frac{r}{2}\hat{\mathbf{i}}\right) \\
&= -a\hat{\mathbf{i}} + \frac{a}{2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{v^2}{2r}\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}) \\
&= -a\hat{\mathbf{i}} + \frac{a}{2}\mathbf{j} - \frac{v^2}{2r}\hat{\mathbf{i}} \\
&= -\left(a + \frac{v^2}{2r}\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{a}{2}\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

□

Roterande koordinatsystem

Vi inför en fix punkt origo O och fixa koordinataxlar X och Y. Vi betraktar två partiklar A och B.

Vi vill beskriva A's rörelse relativt ett koordinatsystem som följer B och vars axlar x och y roterar med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$.



Som vanligt kan vi skriva

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \quad = \mathbf{r}_B + x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

A's ortsvektor rel O

B's ortsv. rel O

Vektor från B till A

Vi är intresserade av tidsderivatan av $\mathbf{r}_{A/B}$

Allmänt kan vi betrakta en vektor

$$\mathbf{T} = T_x\hat{\mathbf{i}} + T_y\hat{\mathbf{j}}$$

Dess tidsderivata relativt xy-systemet är

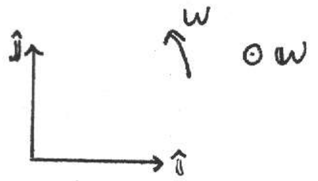
$$\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{xy} = \dot{T}_x\hat{\mathbf{i}} + \dot{T}_y\hat{\mathbf{j}}$$

Tidsderivatan relativt XY-systemet är

$$\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{XY} = \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{xy} + T_x\dot{\hat{\mathbf{i}}} + T_y\dot{\hat{\mathbf{j}}}$$

Men vad är $\dot{\hat{\mathbf{i}}}$ och $\dot{\hat{\mathbf{j}}}$?

Jo, $\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{i}}} = \omega\hat{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{i}} \\ \dot{\hat{\mathbf{j}}} = -\omega\hat{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$



Allmänt gäller att vektor $\mathbf{S}$ som roterar med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ har

$$\dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{S}$$

Så $\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{XY} = \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{xy} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{T}$

Vi kan nu tillämpa detta resonemang på vektorn $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt}\right)_{XY} = \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt}\right)_{xy}}_{\mathbf{v}_{rel}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{A/B}$$

A's hastighet relativt B
sedd i det roterande
koordinatsystemet

Vi får då att

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{A's hastighet} \\ \text{rel. O}}}{\mathbf{v}_A} = \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{B's hast} \\ \text{rel O}}}{\mathbf{v}_B} + \left(\frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt}\right)_{XY} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

Låt oss derivera en gång till:

$$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{A's acc} \\ \text{rel O}}}{\mathbf{a}_A} = \mathbf{a}_B + \left(\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}\right)\right)_{XY}$$

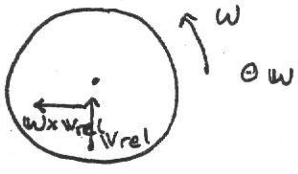
$$= \mathbf{a}_B + \left(\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}\right)\right)_{xy} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}\right)$$

$$= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{rel} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{B's acc} \\ \text{rel O.}}}{\mathbf{a}_B} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{A's acc} \\ \text{rel B i det} \\ \text{rot. koord. syst.}}}{\mathbf{a}_{rel}} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{term pga} \\ \text{det rot. syst.} \\ \text{vinkelacc}}}{\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B}} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{corolisacc}}}{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Centripetalacc}}}{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})}$$

Observera att Coriolisaccelerationen är ⊥ mot $\mathbf{v}_{rel}$.

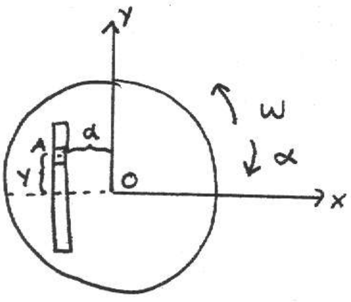
Man känner av den om man t. ex försöker gå rakt fram på en roterande karusell.



Coriolisaccelerationen påverkar vindriktningen kring lågtryck (olika på norra och södra halvklotet). Teoretiskt påverkar det även badkarsvirvlar.

"Foucalts pendel", en enorm pendel vars pendelplan vrider sig pga coriolisaccelerationen.

Exempel 5/150



Fixt koordinatsystem.

Hjulet roterar motsols med vinkelhastigheten ω.

Spåret roterar med hjulet. Partikeln A's läge i spåret beskrivs med avståndet y.

Beskriv A's hastighet $\mathbf{v}_A$ och acceleration $\mathbf{a}_A$ uttryckt i y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ i det avbildade ögonblicket.

(relativt det fixa koordinatsystemet)

Relativt ett med hjulet roterande koordinatsystem har vi:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{rel} = \dot{y}\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{a}_{rel} = \ddot{y} \end{cases}$$

Hjulet har

$\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}$

$\boldsymbol{\alpha} = -\alpha\hat{\mathbf{k}}$

Relativt det fixa koordinatsystemet får vi då

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{A/O} + \mathbf{v}_{rel}$$

$$= \omega\hat{\mathbf{k}}\times(-d\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) + \dot{y}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= -\omega d\hat{\mathbf{j}} - \omega y\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\mathbf{j}$$

$$= -\omega y\hat{\mathbf{i}} + (-\omega d + \dot{y})\mathbf{j}$$

För accelerationen gäller

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{rel} + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}_{A/O} + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{A/O})$$

$$= \ddot{y}\mathbf{j} - \alpha\hat{\mathbf{k}}\times(-d\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) + 2\omega\hat{\mathbf{k}}\times\dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \omega\hat{\mathbf{k}}\times(\omega\hat{\mathbf{k}}\times(-d\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}))$$

$$= (\alpha y + \omega^2 d - 2\omega\dot{y})\hat{\mathbf{i}} + (\alpha d - \omega^2 y + \ddot{y})\hat{\mathbf{j}}$$

Stelkroppsdynamik i planet

För ett allmänt system av partiklar t.ex en stel kropp, gäller att

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$

den totala yttre kraften som verkar på systemet

systemets massa

acc. för systemets tyngdpunkt G

Dessutom gäller

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

totala yttre vridmomentet map G

tidsderivatan av systemets rörelsemängdsmoment map G

Man kan också skriva

$$\sum \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}}$$

totala yttre vridmomentet kring P

vektor från P till G

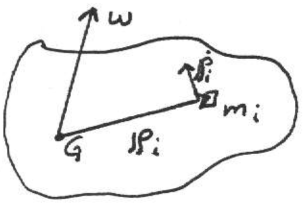
Vi har också att

$$\sum \mathbf{M}_P = (\dot{\mathbf{H}}_{rel}) + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P$$

$(\mathbf{H}_P)_{rel}$ = rörelsemängsmoment relativt P.

$\mathbf{a}_P$ = punkten P:s acceleration

Vi behöver uttryck för $\mathbf{H}_G$ och $(\mathbf{H}_P)_{rel}$ för en stel kropp.



$$\mathbf{H}_G = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)$$

där $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ är m_i:s hastighet rel. G.

För en plan rörelse $(\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k})$ ger detta att $\mathbf{H}_G$ är parallell med $\boldsymbol{\omega}$ och har storleken

$$H = \omega \sum_i m_i \rho_i^2$$

För ett kontinum övergår summan i en integral $\Rightarrow$

$$H_G = \omega \int \rho^2 dm$$

Vi kan införa en storhet $\bar{I}$ sådan att

$$H_G = \bar{I}\omega \Rightarrow \bar{I} = \sum_i m_i \rho_i^2 = \int \rho^2 dm$$

$\bar{I}$ kallas för kroppens tröghetsmoment (mass moment of inertia) map z-axeln genom G

Hur detta räknas ut konkret beskrivs i appendix B, vi återkommer till detta senare.

$\bar{I}$ är en konstant egenskap hos kroppen, alltså gäller att

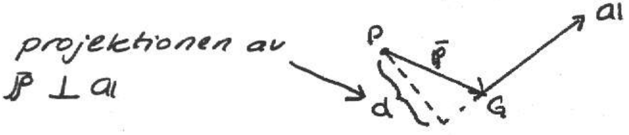
$$\sum M_G = \dot{H}_G = \bar{I}\dot{\omega} = \bar{I}\alpha$$

för en plan rörelse när $\mathbb{M}_G$ är parallell med ω.

Vi kan också uttrycka detta för en godtycklig punkt P:

$$\sum M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$

$\uparrow$
tänk på tecknet!



Slutligen kan vi införa kroppens tröghetsmoment I_P map en axel genom en punkt P som är fix i den stela kroppen. Vi får då

$$\sum \mathbb{M}_P = I_P \alpha + \bar{\rho} \times m a_P$$

Ett viktigt specialfall är när P samtidigt är en fix punkt i rummet t.ex origo O.

$$\sum \mathbb{M}_O = I_O \alpha \qquad (a_O = 0)$$

Translationsrörelse

Vid en ren translationsrörelse sker ingen rotation ($\omega = 0, \alpha = 0$) och ekvationerna blir

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F} = m\bar{a} \\ \sum M_G = 0 \end{cases}$$

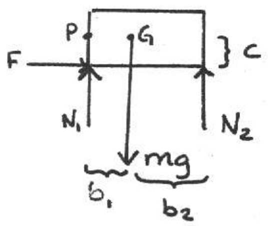
Alternativt $\sum \mathbf{M}_P = \bar{\rho} \times m\bar{a}$

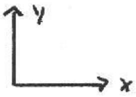
eller $\sum \mathbf{M}_O = 0$

Vi behöver inte räkna ut $\bar{I}$ för sådana problem.

Övning 6/2

Bestäm gräsklipparens acceleration





$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow$

x-led: $F = ma$ (1)

y-led: $N_1 + N_2 - mg = 0$ (2)

$\sum \mathbf{M}_G = 0 \Rightarrow$

$\overset{\curvearrowleft}{G}: \; -N_1 b_1 + N_{b_2} + Fc = 0$ (3)

Hjulet vid P spinner $\Rightarrow F = \mu_k N_1$ (4)

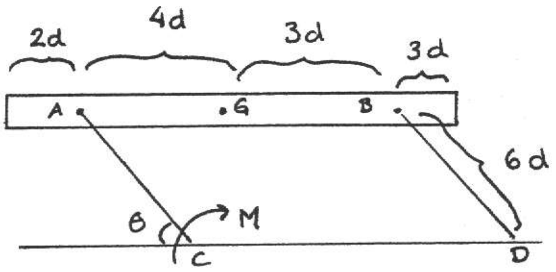
(2),(4) i (3) $\Rightarrow N_1 = mg \cdot \dfrac{b_2}{b_1 + b_2 - \mu_k c}$ (5)

(4),(5) $\Rightarrow F = mg\,\mu_k \dfrac{b_2}{b_1 + b_2 - \mu_k c}$ (6)

(1), (6) $\Rightarrow a = g\,\mu_k \dfrac{b_2}{b_1 + b_2 - \mu_k c}$

$$N_2 = mg \frac{b_1 - \mu_k c}{b_1 + b_2 - \mu_k c}$$

Övning 6/32



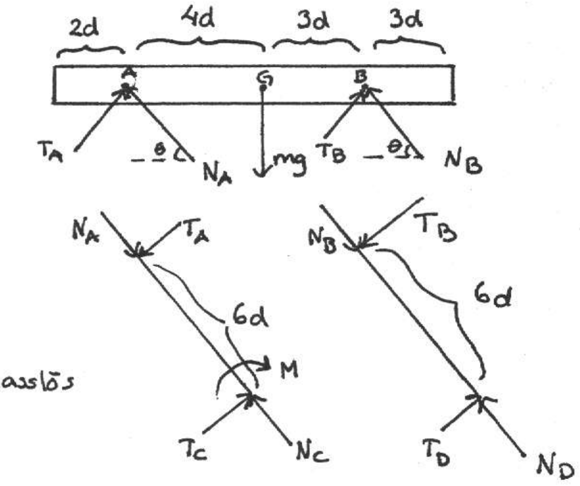
Homogen balk, massa m

Masslösa stänger

Start i vila vid $\theta = 0$

Sökt: kraften i A när $\theta = \frac{\pi}{3}$

Friläggning:



Ekvationer:

balk AC: $\nwarrow$ $-N_A + N_C = 0$

$\nearrow$ $-T_A + T_C = 0$

$\overset{\curvearrowleft}{C}$ $M - 6dT_A = 0$ ↖ masslös

$\Rightarrow T_A = \frac{M}{6d}$

balk BD $\nwarrow$ $-N_B + N_D = 0$

$\nearrow$ $-T_B + T_D = 0$

$\overset{\curvearrowleft}{D}$ $-6dT_B = 0$ ↖ masslös $(F = \underset{\overset{\uparrow}{=0}}{m} \cdot a)$

$\Rightarrow T_B = 0$

Stor balk: $\nwarrow$ $N_A + N_B - mg\sin\theta = -m6d\dot{\theta}^2$ (1)

$\nearrow$ $\underbrace{\frac{M}{6d}}_{T_A} + \underbrace{0}_{T_B} - mg\cos\theta = m6d\ddot{\theta}$ (2)

ingen rotation runt tyngdpkten.

$\overset{\curvearrowleft}{G}$: $-\frac{M}{6d}4d\cos\theta - N_A 4d\sin\theta + N_B 3d\sin\theta = 0$ (3)

Använd nu att $\ddot{\theta}d\theta = \dot{\theta}d\dot{\theta}$

$$(2) \Rightarrow \int_0^{\theta}\left(\frac{M}{6d} - mg\cos\tilde{\theta}\right)d\tilde{\theta} = \int_0^{\dot{\theta}}(m\,6d)\dot{\tilde{\theta}}\,d\dot{\tilde{\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M\theta}{6d} - mg\sin\theta = 6dm\frac{1}{2}\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \quad M\theta = mg6d\sin\theta + \frac{1}{2}m(6d\dot{\theta})^2 \qquad (\text{Arbetet} = mgh + \frac{mv^2}{2})!$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{M}{18d^2m}\theta - \frac{g}{3d}\sin\theta \qquad (4)$$

$$(1);(4) \Rightarrow \quad N_A + N_B = 3mg\sin\theta - \frac{M}{3d}\theta$$

$$(3) \Rightarrow \quad -4N_A\sin\theta + 3N_B\sin\theta = \frac{2M}{3d}\cos\theta$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{9}{7}mg\sin\theta - \frac{M}{7d}\left(\theta + \frac{2}{3}\cot\theta\right)$$

Vi hade också att $T_A = \frac{M}{6d}$

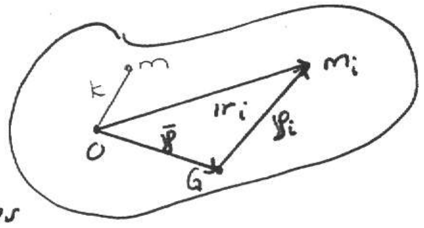
$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow N_A = \frac{9\sqrt{3}}{14}mg - \frac{M}{7d}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow F_A = \sqrt{N_A^2 + T_A^2} = \left\{\begin{array}{l} m = 200\,kg \\ M = 3\,kNm \\ d = 0{,}25\,m \end{array}\right\} = 2{,}02\,kN$$

Tröghetsmoment

Vi definierar tröghetsmomentet I_o för en stel kropp m a p en punkt O enligt

$$I_o = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i m_i r_i^2$$

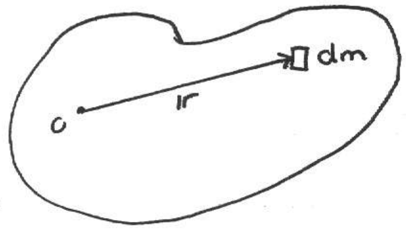


Av speciell betydelse är tröghetsmomentet m a p kroppens tyngdpunkt G.

$$I_G = \bar{I} = \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i = \sum_i m_i \rho_i^2$$

Vid kontinuerlig massfördelning får vi istället en integral

$$I_o = \int_{\text{kroppen}} dm\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$



Om man känner $\bar{I}$ så kan man enkelt bestämma I_o för en godtycklig punkt O:

$$I_o = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i m_i (\bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}_i)\cdot(\bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}_i) = \sum_i m_i \bar{\boldsymbol{\rho}}\cdot\bar{\boldsymbol{\rho}} +$$

$$\underbrace{2\sum_i m_i \bar{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\rho}_i}_{\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0} + \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i = m\bar{\boldsymbol{\rho}}\cdot\bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{I} = m\rho^2 + \bar{I}$$

↗ kroppens totala massa

↗ avståndet från 0 till G

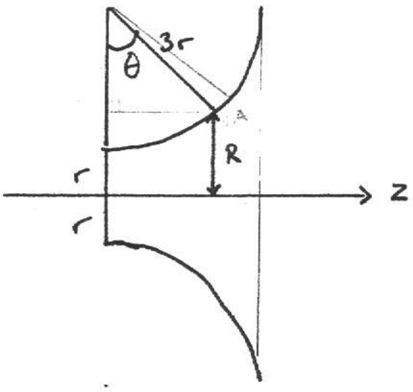
parallellaxelteoremet
Steiners sats

Ibland pratar man om tröghetsradien k_o eller $\bar{k} = k_G$ definierade av

$$I_o = m k_o^2$$

$$\bar{I} = m \bar{k}^2$$

Exempel 8.42



Bestäm tröghetradien k_z för tratten map z-axeln.

$$k_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$

Parametrisera kroppen med vinkeln θ enligt figur.

$$m = \int dm = \rho \int dA = \rho \int \underbrace{d\theta\, 3r}_{\text{bågelement}}\, 2\pi R = \rho \int d\theta\, 3r\, 2\pi (4r - 3r\cos\theta)$$

massa per ytenhet

areaelement

radie av utsvept cirkel

$$= 6\pi\rho r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta\, (4 - 3\cos\theta) = 6\pi\rho r^2 (2\pi - 3)$$

$$I_o = \int dm\, R^2 = \ldots = 6\pi\rho r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta\, (4 - 3\cos\theta) R^2 =$$

$$= 6R\rho r^4 \int_0^{\pi/2} d\theta\, (4 - 3\cos\theta)^3 = 6\pi\rho r^4 \int_0^{\pi/2} d\theta \left(64 - 144\cos\theta + 108\cos^2\theta - 27\cos^3\theta\right)$$

$$= 6\pi\rho r^4 \int_0^{\pi/2} d\theta\, (64 - 144\cos\theta + 54 + 54\cos 2\theta - \frac{27}{4}\cos\theta - \frac{81}{4}\cos 3\theta$$

$$= \ldots = 6\pi\rho r^4 (59\pi - 162)$$

$$k_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \ldots = a\sqrt{\frac{59\pi - 162}{18\pi - 27}}$$

$$r = \frac{a}{3}$$

Ekvationer för en stel kropps rörelse i planet

Vi har som vanligt Newtons andra lag

$$\mathbb{F} = m\bar{a}$$

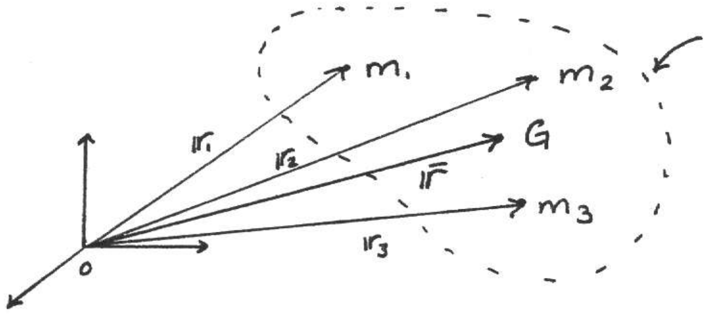
totala yttre kraften på kroppen

kroppens totala massa

tyngdpunktens acceleration.

System av partiklar

Vi har ett system av n partiklar med massor $m_1, \dots, m_n$ och ortsvektorer $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$



systemgräns

(det är viktigt att noga definiera exakt vad som ingår i systemet)

Partikelmekanikens lagar gäller naturligtvis för de enskilda partiklarna. Men vi vill även kunna beskriva systemet som en helhet.

Systemets totala massa är $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Systemets tyngdpunkt G definieras av sin ortsvektor

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

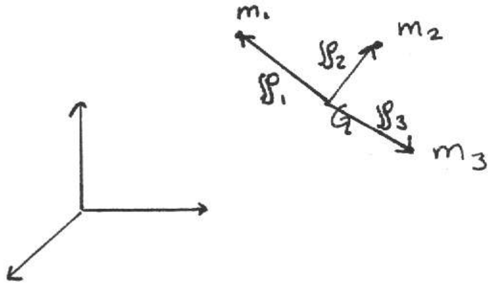
Vi inför de enskilda partiklarnas ortsvektorer $\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_n$ relativt tyngdpunkten G. Det gäller att

$$\mathbf{r}_i = \bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}_i$$

Dessa $\boldsymbol{\rho}_i$ har egenskapen att

$$\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}}) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \sum_i m_i \cdot \bar{\mathbf{r}} =$$

$$m\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}} \sum_i m_i = m\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}} m = 0$$



Systemets rörelsemängd är

$$\mathbf{G} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (m \bar{\mathbf{r}}) = m \bar{\mathbf{v}}$$

där $\bar{\mathbf{v}}$ är tyngdpunktens hastighet.

Newtons andra lag för partikel i säger att

$$\underbrace{\left(\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ij} \right)}_{\text{totala kraften på partikel } i.} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

kraften på partikel i från källor <u>utanför</u> systemet.

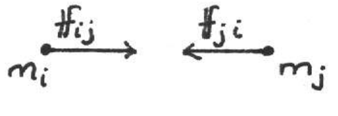
kraften <u>på</u> partikel i <u>från</u> partikel j.

Vi summerar över i:

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Men Newtons tredje lag säger att

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$$



Vi får då att

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = -\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ji} = -\sum_j \sum_i \mathbf{f}_{ij} =$$

$$= -\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} \Rightarrow \sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = 0$$

och $\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i \mathbf{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (m \bar{\mathbf{r}}) = m \bar{\mathbf{a}}$

så vi finner att

$$\mathbf{F} = m \bar{\mathbf{a}}$$

totala yttre kraften på systemet

totala massan

systemets tyngdpunkts acceleration

Alternativt kan vi skriva

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$$

Arbete och energi

Summan av de inre krafternas uträttade arbete är noll.

Det gäller alltså att summan av de yttre krafternas uträttade arbete är lika med ändringen i systemets totala kinetiska energi T.

Precis som tidigare kan vi införa en potentiell energi för konservativa krafter.

Vad är T för ett system?

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right) \cdot \left(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \underbrace{2\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i}_{=0} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

kinetisk energi
pga tyngdpunktens
rörelse

kinetisk energi
pga partiklarnas rörelse
relativt tyngdpunkten.

Systemets rörelsemängdsmoment
map O är

$$\mathbf{H}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

Vi tar tidsderivatan och får

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{M}_{Oi} = \mathbf{M}_O$$

kraften $\mathbf{F}_i$'s vridmoment map O

totala vridmomentet map O.

Systemets rörelsemängd map G:

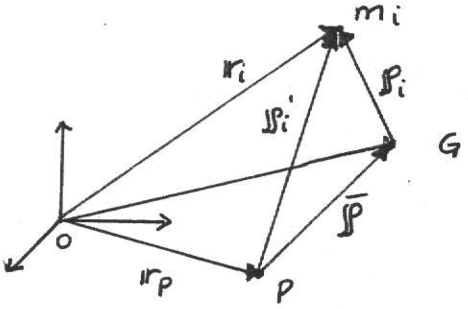
$$\mathbf{H}_G = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)$$

$$= \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

Vi tar tidsderivatan och får

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \sum_i (\underbrace{\dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i}_{=0} + \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_G$$

Slutligen beräknar vi rörelsemängdsmomentet map en godtycklig punkt P som i allmänhet accelererar. P har ortsvektorn $\mathbf{r}_P$



$$\mathbf{H}_P = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i' \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

$$= \dots = \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G$$

rörelsemängdsmomentet map P för en partikel i G med massan m och hastighet $\bar{\mathbf{v}}$.

rörelsemängsmomentet map G

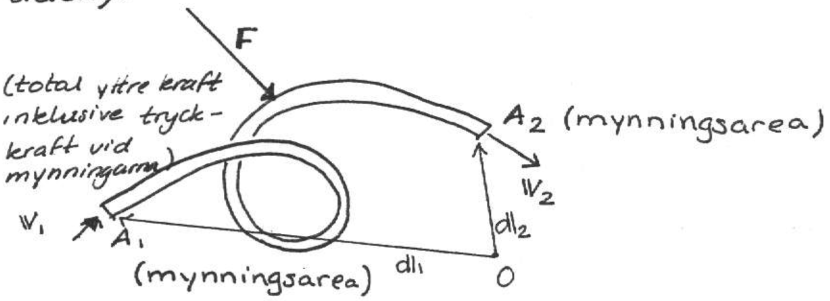
Vi har vridmomentet map P

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{F} \quad \text{så att}$$

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m \bar{\mathbf{a}} \neq \dot{\mathbf{H}}_P \quad \text{OBS!}$$

Stationärt massflöde

Tillämpbart på t.ex turbiner, pumpar, jetmotorer, vattenslangar... (maskiner med en strömmande fluid) Vi inskränker oss till det stationära fallet (situationen är konstant i tiden).



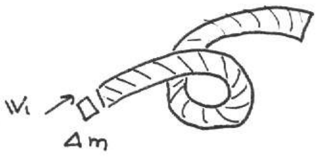
För en inkompressibel fluid (t.ex vatten) gäller att

$\rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho v_2 A_2 = m' =$ massflöde/tidsenhet

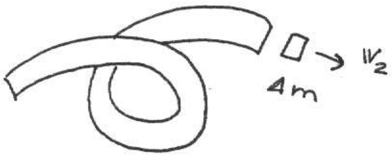
$\uparrow$

fluidens densitet

Vi vill ställa upp Newtons andra lag för systemet. T.ex har vi kanske ett statikproblem där accelerationen är noll och vi söker den totala yttre kraften $\mathbf{F}$ som behövs för jämvikt. Vi betraktar nedanstående system vid tidpunkterna t och t+Δt.



tiden t



tiden t+Δt

Vi betraktar alltså en given mängd materia och kan använda Newtons andra lag. Ändringen i systemets rörelsemängd $\Delta \mathbf{G} = \mathbf{G}_{efter} - \mathbf{G}_{före} = \Delta m \cdot \mathbf{v}_2 - \Delta m \cdot \mathbf{v}_1 =$

$= \Delta m (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$

Vi behöver även en momentekvation. Den mest fundamentala är

- $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{yttre kraftens} \\ \text{vridmoment} \\ \text{map tyngd-} \\ \text{punkten } G}}{\mathbb{M}_G} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vinkelaccelerations-} \\ \text{vektorn}}}{\bar{I}\,\boldsymbol{\alpha}}$$

Med kroppen och alla krafter i xy-planet har vi

$$\begin{cases} \mathbb{M}_G = M_G \hat{\mathbb{k}} \\ \boldsymbol{\alpha} = \alpha \hat{\mathbb{k}} \end{cases}$$

Vi kan skriva $M_G = \bar{I}\alpha$

En variant är

- $\mathbb{M}_o = I_o \boldsymbol{\alpha}$ där o är en fix punkt

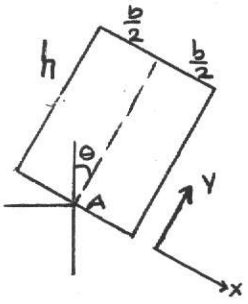
Ibland vill vi använda en godtycklig momentpunkt P

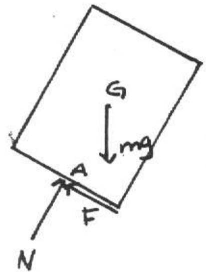
- $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{yttre krafters} \\ \text{vridmoment map P}}}{\mathbb{M}_P} = \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{map G}}}{\bar{I}}\,\boldsymbol{\alpha} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vektor} \\ \text{från P till G}}}{\bar{\mathbb{p}}} \times m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tyngdpktns} \\ \text{acceleration}}}{\bar{\mathbb{a}}}$$

- $$\mathbb{M}_P = I_P \boldsymbol{\alpha} + \overset{\swarrow}{\bar{\mathbb{p}}} \times m\, \overset{\swarrow \text{ Punkten P's acceleration}}{\mathbb{a}_P}$$

Exempel 6.72

En homogen platta vrider sig kring punkten A. Start i vila med $\theta \approx 0$. Bestäm krafterna i A som funktion av θ.





Vi har Newtons andra lag:

$$\begin{aligned} \nearrow &: \begin{cases} N - mg\cos\theta = m\left(-\frac{h}{2}\dot{\theta}^2\right) \\ F - mg\sin\theta = -m\frac{h}{2}\ddot{\theta} \end{cases} \\ \nwarrow &: \end{aligned}$$

Momentekvationen map A

$$\overset{\curvearrowright}{A}: \quad \underbrace{mg\frac{h}{2}\sin\theta}_{M_A} = I_A\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad mgh\dot{\theta}\sin\theta - I_A 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(-mgh\cos\theta - - I_A\dot{\theta}^2\right) = 0$$

$$mgh\cos\theta + I_A\dot{\theta}^2 = \text{konst}$$

$\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ vid start $\Rightarrow I_A\dot{\theta}^2 = mgh(1-\cos\theta)$

$$\begin{cases} F = mg\sin\theta - \dfrac{mh}{2}\,\dfrac{mgh}{2I_A}\sin\theta = mg\sin\theta\,\dfrac{b^2+h^2}{b^2+4h^2} \\[2ex] N = mg\cos\theta - \dfrac{mh}{2}\,\dfrac{mgh}{I_A}(1-\cos\theta) = \left(mg\left(b^2+10h^2\right)\cos\theta - 6h^2\right)/\left(b^2+4h^2\right) \end{cases}$$

Men vad är I_A? Jo, $I_A = \displaystyle\int_{-b/2}^{b/2}dx\int_0^h dy\,\underbrace{\frac{m}{bh}}_{\rho = \text{massa/ytenhet}}\,\underbrace{(x^2+y^2)}_{(\text{avstånd till }A)^2} =$

$$= m\left(\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{3}h^2\right)$$

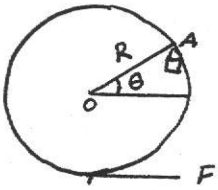
Glidning inträffar då

$\dfrac{F}{N} = \mu_k$ friktionskoeff.

Kroppen lyfter då

$N = 0$

<u>Exempel 6.112</u>



Pariserhjul med n gondoler (n delbart m 4) vardera med massan m och tröghetsmoment $I_A = mk^2$ map upphängningspunkten A. Avståndet h från A till tyngdpunkten G

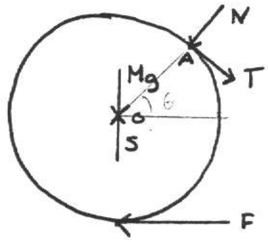
Hjulet har radie R och tröghetsmoment I_0 map centrum O.

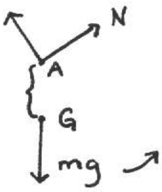
Start i vila. Bestäm erforde ligt vridmoment FR för att ge en viss initial vinkelacceleration α.

Frilägg hjul och gondol

Cirkelrörelse

$\bar{a} = -r\omega^2 \bar{e}_n + r\alpha \bar{e}_t$





↗ ϕ (gondolens utslagsvinkel)

Newtons andra lag för gondolen

$\dot{\theta} = 0$ initialt

$\dot{\phi} = 0$ -"-

$$\begin{cases} \uparrow: & N\sin\theta + T\cos\theta - mg = m\,R\ddot{\theta}\cos\theta \\ \rightarrow: & N\cos\theta - T\sin\theta = m(-R\ddot{\theta}\sin\theta + h\ddot{\phi}) \end{cases}$$

Momentekvationen map A: $M_A = I_A\ddot{\phi} + \bar{\rho} \times m\,a_A$

$$\overset{\curvearrowleft}{A}: \quad 0 = I\ddot{\phi} - mhR\ddot{\theta}\sin\theta$$

$$\begin{cases} N\sin\theta + T\cos\theta = mg + mR\ddot{\theta}\cos\theta \\ N\cos\theta - T\sin\theta = \frac{m^2h^2R}{I_A}\dot{\theta}\sin\theta - mR\ddot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N = \ldots \\ T = mg\cos\theta + mR\ddot{\theta} - \frac{m^2h^2R}{mk^2}\ddot{\theta}\sin^2\theta \end{cases}$$

Skriv upp momentekvationen för hjulet map O.

$\alpha = \ddot{\theta}$

$$\overset{\curvearrowright}{O}: \quad FR - \sum_{i=1}^{n} T_i R = I_0\alpha$$

$$F = \frac{I_0}{R}\alpha - \sum_{i=1}^{n} T_i$$

$$\text{Men } \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(mg\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}i\right) + mR\ddot{\theta} - \frac{mh^2R}{k^2}\ddot{\theta}\sin^2\left(\theta + \frac{2\pi}{n}i\right)\right)\right\}$$

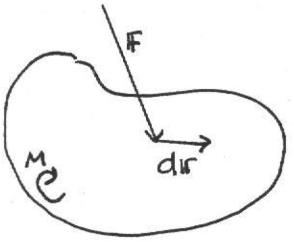
$$= mnR\ddot{\theta} - \frac{mh^2R}{k^2}\ddot{\theta}\frac{n}{2}$$

Knepet är att [illegible]

[illegible]

ARBETE & ENERGI : 6/6

Vi betraktar en stel kropp som påverkas av yttre krafter och vridmoment. Om angreppspunkten för kraften $\mathbf{F}$ flyttas sträckan $d\mathbf{r}$ så uträttas arbetet



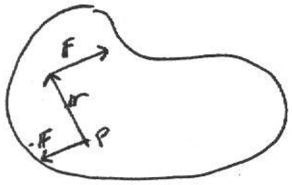
$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

på kroppen. Om kroppen roterar vinkeln $d\theta$ su uträttar vridmomentet M arbetet

$$dU = M d\theta \quad \text{på kroppen}$$

Bevis: Ersätt $\mathbf{M}$ med ett kraftpar $\mathbf{F}$ och $-\mathbf{F}$ så att $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$

En allmän rörelse kan ses som en translation och en rotation kring punkten P. Translationsrörelsen ger $dU = 0$. Rotationsrörelsen ger $dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} =$



$= \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}\times d\theta\mathbf{k}) = M d\theta$. Som vanligt gäller att på en kropp uträttat arbete = ändring i kroppens kinetiska energi.

Ibland kan vi skriva $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{kons} + \mathbf{F}_{övriga}$

och införa en potentiell energi för att beskriva $\mathbf{F}_{konservativ}$.

Kinetisk + potentiell energi = total mekanisk energi "$T + U = E$"

Av $\mathbf{F}_{övriga}$ uträttat arbete = ändring i total mekanisk energi.

Vi behöver uttryck för en stel kropps kinetiska energi T.

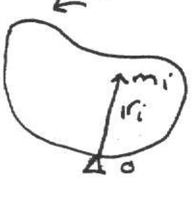
Allmänt gäller att $T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m v^2 = \sum m_i \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i \frac{1}{2}$

Några specialfall:

1) Ren translation $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$ oberoende av i.

$T = \sum_i \frac{1}{2} m \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ där m = kroppens totala massa.

2) Rotation kring en fix punkt O med vinkelhastighet ω.



$V_i = \omega r_i$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

3) Allmän plan rörelse

a) Använd att det finns en punkt C som momentant är i vila. Enligt tidigare får vi då

$T = \frac{1}{2} I_c \omega^2$

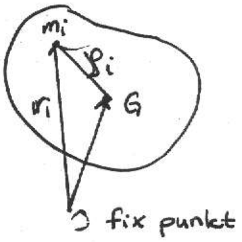
b) Inför kroppens tyngdpunkt G. En masspunkt m_i har hastigheten $\mathbb{V}_i = \bar{\mathbb{V}} + (\mathbb{V}_i)_{rel} = \bar{\mathbb{V}} + \omega \times \rho_i$

hast rel O

tyngdpkt hast

pkts m_i's hast relativt G

kroppens vinkelhast



$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{\mathbb{V}} + \omega \times \rho_i)\cdot(\bar{\mathbb{V}} + \omega \times \rho_i) =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \bar{\mathbb{V}}\cdot\bar{\mathbb{V}} + \sum_i m_i \bar{\mathbb{V}}\cdot(m \times \rho) + \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} m \bar{\mathbb{V}}\cdot\bar{\mathbb{V}} + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

↑tröghetsmoment map G

Rörelsemängd och impuls, rörelsemängsmoment och impulsmoment

Som tidigare gäller att

$\mathbb{F} = \dot{G}$ där $G = m\bar{\mathbb{V}}$

totala yttre kraften på en stelkropp

kroppens rörelsemängd

Vi har även

$\mathbb{M}_G = \dot{\mathbb{H}}_G$ där $\mathbb{H}_G = \bar{I}\omega$

tröghetsmoment map G

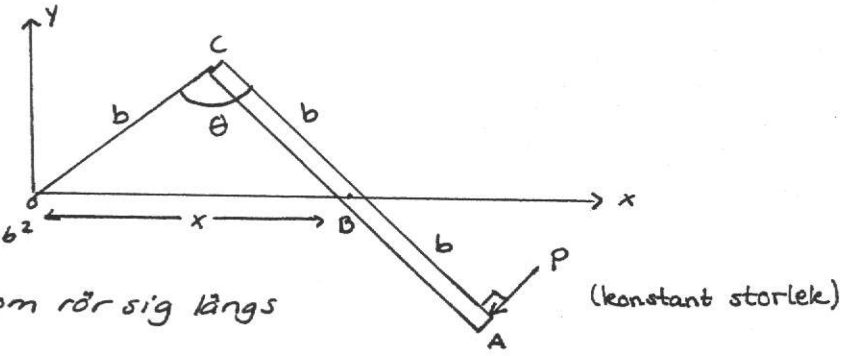
totala yttre vridmomentet map G

$\mathbb{M}_o = \dot{\mathbb{H}}_o$ där $\mathbb{H}_o = I_o \omega$

för en fix punkt O.

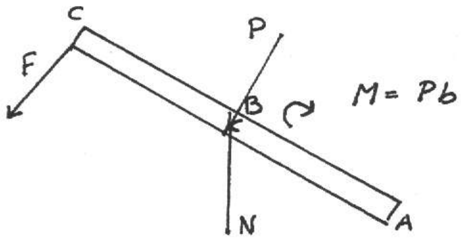
Exempel 6.152

Stången AC har massan m och tröghetsmoment $I_B = \frac{1}{3} m b^2$ map punkten B, som rör sig längs x-axeln. Start i vila med $\theta = \pi$.



Bestäm stångens vinkelhastighet $\omega = \frac{1}{2}\dot{\theta}$ då $\theta = 0$ dvs då $B = 0$

Friläggning



Vi vill göra ett energiresonemang.

Uträttat arbete = ändring i kinetisk energi.

F och N uträttar inget arbete. Uträttat arbete

$x = 2b \sin\frac{\theta}{2}$
$dx = b \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$$U = M \cdot \frac{\pi}{2} + \int_{2b}^{0} dx \left(-P \cos\frac{\theta}{2}\right) = Pb\frac{\pi}{2} + \int_{\pi}^{0} d\theta\, (-Pb) \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= Pb\frac{\pi}{2} + Pb\frac{\pi}{2} = Pb\pi$$

Kroppens ursprungliga kinetiska energi = 0

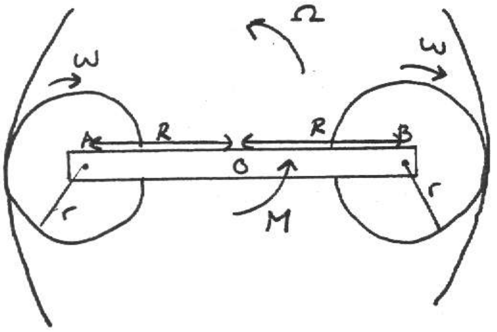
" slutliga "

$$T = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I_B \omega^2 = \frac{1}{2}\left(b \cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} I_B \omega^2$$

$$= 2b^2 m \omega^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} m b^2 \omega^2 = \frac{13}{6} m b^2 \omega^2$$

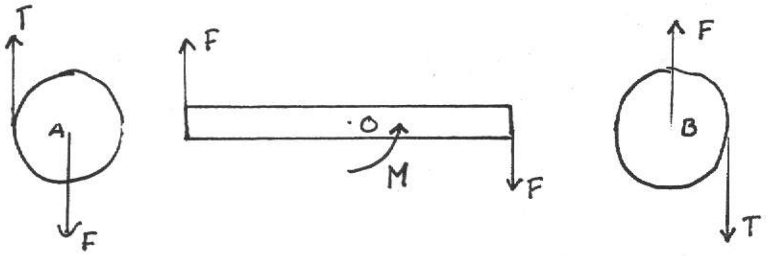
$$T = U \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6\pi}{13}\frac{P}{mb}}$$

Exempel 6.206



Armen AB har tröghetsmoment $2\,m_0 k_0^2$ map O. Varje kugghjul har massa m_1 och tröghetsmoment $m_1 k_1^2$ map A eller B. Bestäm M så att $\dot{\Omega} = \alpha$.

Frilägg arm AB och kugghjul (utom horisontella krafter)



Vi har ett kinematiskt tvång:

$$\omega = \frac{R}{r}\Omega$$

Kraftekvationen för ett kugghjul ger

$$F - T = m_1 R \dot{\Omega}$$

Momentekvationen för ett kugghjul map B

$$\overset{\curvearrowright}{B} \quad rT = m_1 \cdot k_1^2 \dot{\omega}$$

Momentekvationen för armen AB map O

$$\overset{\curvearrowleft}{O} \quad M - 2RF = 2\,m_0 k_0^2 \dot{\Omega}$$

$$\dot{\Omega} = \alpha$$

$$\dot{\omega} = \frac{R}{r}\alpha$$

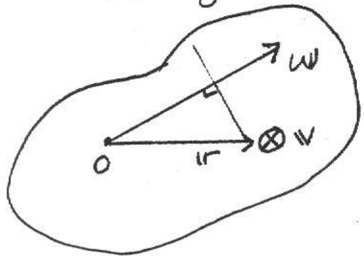
$$T = \frac{m_1 k_1^2}{r^2}\alpha$$

$$F = T + m_1 R\alpha = \left(m_1 k_1^2 \frac{R}{r^2} + m_1 R\right)\alpha$$

$$M = 2RF + 2m_0 k_0^2 = 2\left(m_0 k_0^2 + m_1 k_1^2 \frac{R^2}{r^2} + m_1 R^2\right)\alpha$$

Stelkroppskinematik i tre dimensioner

Stel kropp som roterar med momentan vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$ kring en fix punkt O. Betrakta en materiepunkt med ortsvektor $\mathbf{r}$ map O. Dess hastighet är



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Tidsderivatan ger accelerationen

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$
$$= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Några viktiga specialfall:

1) $\boldsymbol{\omega}$ är konstant i tiden. Rotation med konstant vinkelhastighet $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ kring en fix axel parallell med $\boldsymbol{\omega}$.

2) $\boldsymbol{\omega}$ har konstant riktning men variabel storlek. Rotation kring en fix axel med variabel vinkelhastighet.

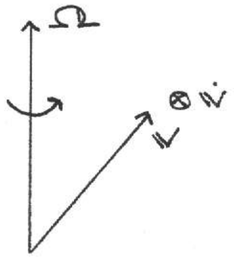
3) $\boldsymbol{\omega}$ har konstant storlek $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ men variabel riktning. Momentant kan detta beskrivas som att $\boldsymbol{\omega}$ roterar (precesserar) med någon annan vinkelhastighet $\boldsymbol{\Omega}$.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$$

<u>Anm:</u> En vektor $\mathbf{V}$ som roterar med vinkelhastighet $\boldsymbol{\Omega}$ uppfyller

$$\dot{\mathbf{V}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$$

Detta betyder att $\frac{d}{dt}|\mathbf{V}| = 0$, dvs $\mathbf{V}$ har konstant storlek



4) ω ändras både till storlek och riktning (allmänna fallet).

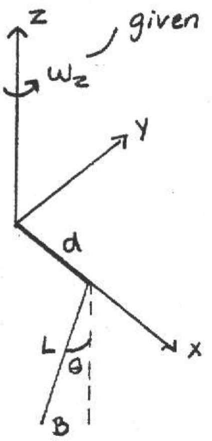
Exempel 7.2

En stel kropps orientering kan specificeras genom att vi anger tre vinklar $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. (T.ex vinklarna mellan tre linjer i kroppen och de fixa koordinataxlarna.) Det är möjligt att beskriva en infinitesimal rotation av kroppen under ett tidsintervall dt med hjälp av <u>vektorn</u> $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vinkelhastigheten}}}{\omega}\, dt = d\theta$

Men det går inte att beskriva en ändlig rotation med hjälp av någon vektor $\Delta\theta$

<u>Bevis</u> Antag att rotation vinkeln 90° kring x-axeln beskrivs av vektorn $\Delta\theta_x$ och rotation 90° kring z-axeln beskrivs av vektorn $\Delta\theta_z$. Men eftersom $\Delta\theta_x + \Delta\theta_z = \Delta\theta_z + \Delta\theta_x$ så borde rotation kring x-axeln följt av rotation kring z-axeln vara ekvivalent med z-axelrotation följt av x-axelrotation. Men så är det inte....

Exempel 7.28



$$\theta = \underset{\uparrow}{\theta_0} \sin \underset{\nearrow}{\Omega} t$$

givna.

Bestäm $\underset{\substack{\nearrow \\ \text{B's hast}}}{\mathbf{v}_B}$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{B's acc}}}{\mathbf{a}_B}$ samt $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pendelns vinkelacc}}}{\alpha}$ då $t=0$

Då $t=0$ har vi

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \dot{\theta} = \theta_0 \Omega \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Punkten B då ortsvektorn

$$\mathbf{r}_B = d\hat{\mathbf{i}} - L\hat{\mathbf{k}}$$

Pendelns vinkelhastighetsvektor är summan av bidragen

från de två rörelserna

$$\boldsymbol{\omega} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotation} \\ \text{kring z-axeln}}}{\omega_z\hat{\mathbf{k}}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pendlingsrörelsen}}}{\theta_0 \Omega \hat{\mathbf{i}}}$$

Vinkelaccelerationen ges av att $\boldsymbol{\omega}$ precesserar runt

z-axeln med vinkelhastighet $\omega_z\hat{\mathbf{k}}$. Vi får då

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \omega_z\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\omega} \\ &= -\theta_0 \Omega \omega_z \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

B's hastighet ges av

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B = (\omega_z d - \theta_0 \Omega L)\hat{\mathbf{j}}$$

och accelerationen av

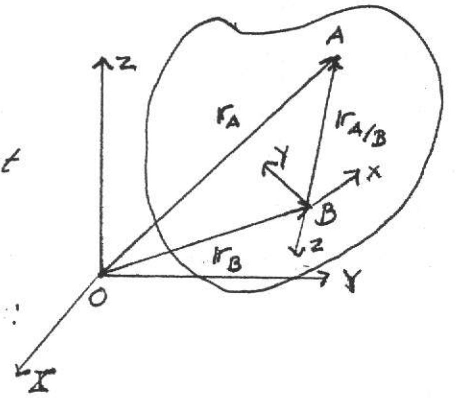
$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B \\ &= (2\theta_0 \omega_z \Omega L - \omega_z^2 d)\hat{\mathbf{i}} \quad \theta_0^2 \Omega^2 L \hat{\mathbf{k}} \qquad . \qquad \square\end{aligned}$$

Hittills har vi betraktat rotation kring en fix punkt O.

Nu betraktar vi en helt godtycklig rörelse för en stel kropp.

Betrakta två punkter A och B i kroppen.

Deras ortsvektorer uppfyller



$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$ enligt figuren.

Ibland vill man relatera hastighet

och acceleration för A och B

till varandra. Tidsderivering ger:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \dot{\mathbf{r}}_{A/B} = \mathbf{v}_B + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kroppens momentana vinkelhastighet}}}{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

En tidsderivata till ger

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \underset{\substack{\nearrow\\ \text{kroppens vinkelacceleration}}}{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$$

xyz-systemet roterar relativt XYZ-systemet med vinkelhastighet $\boldsymbol{\Omega}$ (inte nödvändigtvis likamed kroppens vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$). För en godtycklig vektor $\mathbf{V}$ gäller då att

$$(*)\quad \underset{\substack{\nearrow\\ \text{relativt det}\\ \text{fixa systemet}}}{(\dot{\mathbf{V}})_{XYZ}} = \underset{\substack{\nearrow\\ \text{relativt det}\\ \text{roterande systemet}}}{(\dot{\mathbf{V}})_{xyz}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$$

Vi tillämpar detta på vektorn $\mathbf{r}_{A/B}$ och tar tidsderivatan av ekvationen $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$. Vi får då

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_A &= \mathbf{V}_B + (\dot{\mathbf{r}}_{A/B}) \\
&= \mathbf{V}_B + (\dot{\mathbf{r}}_{A/B})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} \\
&= \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}
\end{aligned}$$

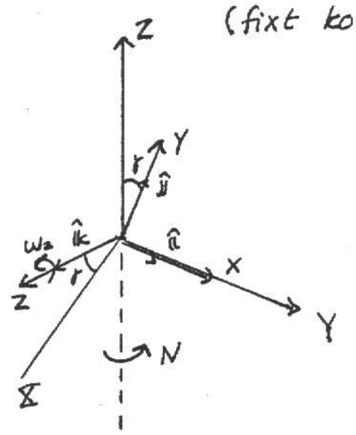
Tillämpa sambandet$^{(*)}$ på vektorn $\mathbf{V}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$. Vi får då

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \frac{d}{dt}(\mathbf{V}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B})_{XYZ} \\
&= \mathbf{a}_B + \frac{d}{dt}(\mathbf{V}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{V}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) \\
&= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{rel} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) \\
&= \underset{\substack{\nearrow\\ \text{punkten B's}\\ \text{acc rel fixa}\\ \text{syst}}}{\mathbf{a}_B} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{A's acc rel}\\ \text{rörliga syst}}}{\mathbf{a}_{rel}} + \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{term pga}\\ \text{rörliga syst}\\ \text{vinkelacc}}}{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B}} + \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{coriolisacc}}}{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_{rel}} + \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{centripetalacc}}}{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B})}
\end{aligned}$$

Exempel 7.54

Ett gyroskop roterar med vinkelhastigheten $\omega_z \hat{k}$. Vinkeln γ har en given tidsderivata $\dot{\gamma}$. Dessutom roterar xyz-systemet kring Z-axeln med vinkelhastigheten N.

(fixt koordinatsystem)



Bestäm gyroskopets totala vinkelacceleration α i det avbildade ögonblicket.

xyz-systemet roterar relativt XYZ-systemet med vinkelhast

$$\Omega = -\dot{\gamma}\hat{i} + N(\cos\gamma \hat{j} + \sin\gamma \hat{k})$$

Gyroskopets momentana vinkelhastighet ω är summan av Ω och $\omega_z \hat{k}$ dvs

$$\omega = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{gyroskopets} \\ \text{vinkelhast rel} \\ \text{xyz-syst.}}}{\omega_z \hat{k}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{xyz-syst vinkelhast}}}{\Omega}$$

Vi vill bestämma

$$\begin{aligned}
\alpha &= (\dot{\omega})_{XYZ} \\
&= (\dot{\omega})_{xyz} + \Omega \times \omega \\
&= N(-\sin\gamma \hat{j} + \cos\gamma \hat{k})\dot{\gamma} + \Omega \times \omega_z \hat{k} \\
&= N\omega_z \cos\gamma \hat{i} + (\dot{\gamma}\omega_z - N\dot{\gamma}\sin\gamma)\hat{j} + N\gamma\cos\gamma \hat{k} \\
&= \alpha_x \hat{i} + \alpha_y \hat{j} + \alpha_z \hat{k}
\end{aligned}$$

frågas efter $|\alpha| = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}$

Stelkroppsdynamik i tre dimensioner

En stel kropps rörelse bestäms av Newtons andra lag:

$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$

momentekvation: $\mathbf{M}_o = \dot{\mathbf{H}}_o$ O = fix punkt

eller $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ G tyngdpktn

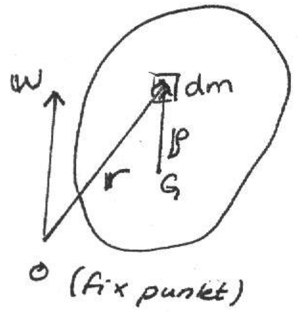
Ibland gör vi istället ett energiresonemang

$\Delta U = \Delta T$

↑ tillfört arbete ↖ ändring i kinetisk energi T

Vi skulle behöva uttryck för $\mathbf{H}_o$, $\mathbf{H}_G$ och T för en given stel kropp med given vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$.

Masselementet dm har ortsvektorn $\mathbf{r}$ map O och hastigheten $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.



Rörelsemängdsmomentet map O är

$$\mathbf{H}_o = \int_{\text{kroppen}} dm\, \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \int dm\, \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{H}_G = \ldots = \int dm\, \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$$

Inför ett koordinatsystem xyz och skriv

$$\begin{cases} \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \\ \boldsymbol{\omega} = \omega_x\hat{\mathbf{i}} + \omega_y\hat{\mathbf{j}} + \omega_z\hat{\mathbf{k}} \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_o = \int dm\, (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) \times \left((\omega_y z - \omega_z y)\hat{\mathbf{i}} + (\omega_z x - \omega_x z)\hat{\mathbf{j}} + (\omega_x y - \omega_y x)\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= \int dm \Big\{ \hat{\mathbf{i}}(\omega_x y^2 - \omega_y xy - \omega_z xz + \omega_x z^2)$$
$$+ \hat{\mathbf{j}}(\omega_y z^2 - \omega_z yz - \omega_x yx + \omega_y x^2)$$
$$+ \hat{\mathbf{k}}(\omega_z x^2 - \omega_x zx - \omega_y zy + \omega_z y^2) \Big\}$$

$$\mathbf{H}_o = H_x\hat{\mathbf{i}} + H_y\hat{\mathbf{j}} + H_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{kroppens tröghetstensor (tröghetsmatris)}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

där

$I_{xx} = \int dm\,(y^2 + z^2)$

$I_{yy} = \int dm\,(z^2 + x^2)$

$I_{zz} = \int dm\,(x^2 + y^2)$

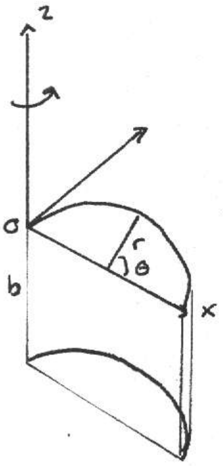
kroppens tröghetsmoment map x, y, z-axlarna

$$\begin{cases} I_{xy} = I_{yx} = \int dm\, xy \\ I_{xz} = I_{zx} = \int dm\, xz \\ I_{yz} = I_{zy} = \int dm\, yz \end{cases}$$ kroppens deviationsmoment

$H = I\omega$ i matrisrotation

Exempel 7.74

Halvcylindern med radie r och höjd b roterar kring z-axeln med vinkelhastighet ω dvs $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{k}$. Bestäm dess rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_O$ map O. Kroppens massa är m.



$$\mathbf{H}_O = H_x\hat{i} + H_y\hat{j} + H_z\hat{k} = -I_{xz}\,\omega_z\hat{i} - I_{yz}\,\omega_z\hat{j} + I_{zz}\,\omega_z\hat{k}$$

$$I_{xz} = \int dm\, xz = \frac{m}{\pi r b}\int \underset{\underset{\text{ytelement}}{\uparrow}}{dA}\, xz = \frac{m}{\pi r b}\int_{-b}^{0} dz \int_{0}^{\pi} r\,d\theta\, r(1+\cos\theta)z =$$

$$= \frac{m}{\pi r b}\left(-\frac{1}{2}b^2\right) r^2 \pi = -\frac{mrb}{2}$$

$$I_{yz} = \int dm\, yz = \frac{m}{\pi r b}\int_{-b}^{0} dz \int_{0}^{\pi} r\,d\theta\, r\sin\theta\, z = \frac{m}{\pi r b}\left(-\frac{1}{2}b^2\right) r^2 \cdot 2 = -\frac{mrb}{\pi}$$

$$I_{zz} = \int dm\,(x^2+y^2) = \frac{m}{\pi r b}\int_{-b}^{0} dz \int_{0}^{\pi} r\,d\theta\, r^2\left((1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right) =$$

$$= \frac{m}{\pi r b}\, b r^3 2\pi = 2mr^2$$

$$\mathbf{H}_O = mr\omega\left(\frac{b}{2}\hat{i} + \frac{b}{\pi}\hat{j} + 2r\hat{k}\right)$$

Observera att $\mathbf{H}_O$ inte är parallell med $\boldsymbol{\omega}$!

Slutligen bestämmer vi kroppens kinetiska energi T:

$$T = \int_{\text{kroppen}} dm\ \frac{1}{2}\,\mathbb{v}\cdot\mathbb{v} = \int dm\,\frac{1}{2}\,(\omega\times\mathbb{r})\cdot(\omega\times\mathbb{r}) = \int dm\,\frac{1}{2}\,\omega\cdot\big(\mathbb{r}\times(\omega\times\mathbb{r})\big)$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega\cdot\int dm\ \mathbb{r}\times(\omega\times\mathbb{r}) = \frac{1}{2}\,\omega\cdot\mathbb{H}_0$$

Jfr $T = \frac{1}{2}\,m\mathbb{v}^2 = \frac{1}{2}\,\mathbb{v}\cdot(m\mathbb{v}) = \frac{1}{2}\,\mathbb{v}\cdot\mathbb{G}$ $\quad \mathbb{G} = m\mathbb{v}$

$H_0 = I\omega$ i matrisrotation

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

de numeriska värdena i matrisen beror på hur vi definierar koordinataxlarna.

Dåliga nyheter: I allmänhet är alla 9 matriselementen skilda från noll.

Goda nyheter: För en godtycklig stel kropp kan man alltid välja koordinataxlarna så att

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Vi har då lagt koordinataxlarna x, y, z längs med kroppens huvudtröghetsaxlar.

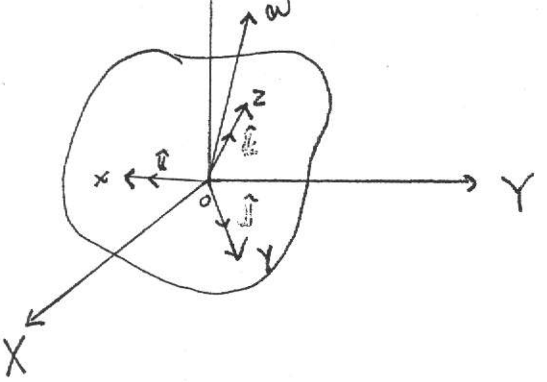
Talen I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} kallas för kroppens <u>huvudtröghetsmoment</u>.

För en symmetrisk kropp överensstämmer huvudtröghetsaxlarna med symmetriaxlarna. I allmänhet måste man använda numeriska metoder.

Nu återgår vi till momentekvationen

$\mathbb{M}_0 = \dot{\mathbb{H}}_0$ (eller $\mathbb{M}_G = \dot{\mathbb{H}}_G$

Vi kan analysera denna ekvation relativt det fixa XYZ-systemet eller



relativt ett med kroppen roterande xyz-system.

$$\mathbb{M}_o = (\dot{\mathbb{H}}_o)_{XYZ} = (\dot{\mathbb{H}}_o)_{xyz} + \omega \times \mathbb{H}_o$$

Om vi inför roterande enhetsvektorer $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ kan vi skriva

$\mathbb{H}_o = H_x \hat{\imath} + H_y \hat{\jmath} + H_z \hat{k}$. då är

$$(\dot{\mathbb{H}}_o)_{xyz} = \dot{H}_x \hat{\imath} + \dot{H}_y \hat{\jmath} + \dot{H}_z k$$

Med $\omega = \omega_x \hat{\imath} + \omega_y \hat{\jmath} + \omega_z \hat{k}$ så är

$$\omega \times \mathbb{H}_o = (\omega_y H_z - \omega_z H_y)\hat{\imath} + (\omega_z H_x - \omega_x H_z)\hat{\jmath} + (\omega_x H_y - \omega_y H_x)\hat{k}$$

Vi kan även utveckla $\mathbb{M}$ i denna bas.

$$\mathbb{M} = M_x \hat{\imath} + M_y \hat{\jmath} + M_z \hat{k}$$

Vi får då ekvationerna

$$(*) \begin{cases} M_x = \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ M_y = \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ M_z = \dot{H}_z + \omega_x H_x - \omega_y H_x \end{cases}$$

Detta är alltså $\mathbb{M} = \dot{\mathbb{H}}_o$ utvecklad i en med kroppen roterande bas $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$. Enligt tidigare gäller att

$$\begin{cases} H_x = I_{xx} w_x - I_{xy} \omega_x - I_{xz} \omega_z \\ H_y = \dots \\ H_z = \dots \end{cases}$$

Observera att eftersom $I_{xx}, I_{xy}, I_{xz} \dots$ är uträknade relativt ett med kroppen roterande koordsystem så är de konstanta i tiden.

Två viktiga specialfall av $(*)$: Ibland är man bara intresserad av fallet att $\omega_x = \omega_y = 0$ (rot kring en fix axel vald som z-axeln)

Ekvationerna lyder då

$$\begin{cases} H_x = -I_{xy}\,\omega_z \\ H_y = -I_{yz}\,\omega_z \\ H_z = I_{zz}\,\omega_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_x = -I_{xz}\,\dot{\omega}_z + I_{yz}\,\omega_z^2 \\ M_y = -I_{yz}\,\dot{\omega}_z - I_{xz}\,\omega_z^2 \\ M_z = I_{zz}\,\dot{\omega}_z \end{cases}$$

Specialfall 2:

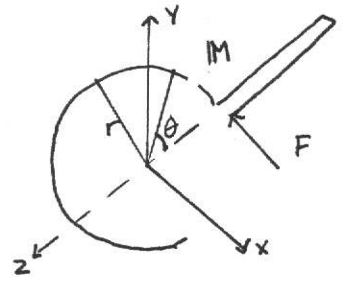
Vi har valt de roterande koordinataxlarna x, y, z, så att de överensstämmer med huvudtröghetsaxlarna.

$$\begin{cases} H_x = I_{xx}\,\omega_x \\ H_y = I_{yy}\,\omega_y \\ H_z = I_{zz}\,\omega_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_x = I_{xx}\,\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\,\omega_y\omega_z \\ M_y = I_{yy}\,\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\,\omega_z\omega_x \\ M_z = I_{zz}\,\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\,\omega_x\omega_y \end{cases}$$

Eulers ekvationer

<u>Exempel 7.93</u> (rotation kring fix axel)

$$\frac{\text{Massa}}{\text{längdenhet}} = \rho$$



Bestäm erfordeligt vridmoment M.

Vi har $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega =$ konstant.

För att bestämma $\mathbb{M}$ behöver vi:

$$I_{xz} = \int dm\, xz = 0$$

$$I_{yz} = \int dm\, yz = \int_0^{3\pi/2} r\,d\theta\,\rho\, r\sin\theta\,(-r\cos\theta) = -\frac{1}{2} r \rho^2 \int_0^{3\pi/2} d\theta\,\sin 2\theta = -\frac{1}{2} r^2 \rho$$

$$\begin{cases} M_x = -\frac{1}{2} r^2 \rho \omega \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

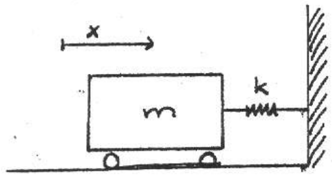
Obs att $\mathbb{M}$ roterar m. kroppen.

Partikelsvängningar

Vi skall ställa upp (mekanik) och lösa (matematik) differensekvationer som beskriver svängande, vibrerande system.

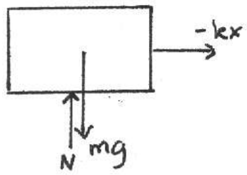
Vi börjar med det enklaste fallet, och lägger efter hand till fler komplikationer.

Fri odämpad svängning



Vi använder en modell enligt figuren.

Vagnens position bestäms av x-koordinaten vald så att systemet är i jämvikt (fjädern ospänd) då $x=0$.



Frilägg vagnen:

Ställ upp Newtons andra lag för vagnen.

$$m\ddot{x} = -kx$$

Vi vill finna den allmänna lösningen till denna differensialekvation. Vi inför systemets naturliga vinkelhastighet

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

Differentialekvationen kan då skrivas

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

Den allmänna lösningen är $x = \underset{\uparrow}{A}\cos\omega_n t + \underset{\uparrow}{B}\sin\omega_n t =$

godtyckl. konst

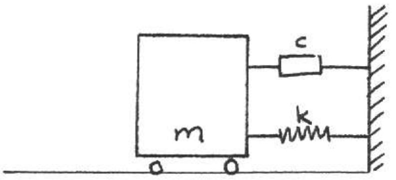
$$= \underset{\text{amplitud}}{C}\sin(\omega_n t + \underset{\text{fasvinkel}}{\Psi})$$

Konstanterna A och B eller C och Ψ kan bestämmas om vi t.ex känner $x(0)$ och $\dot{x}(0)$

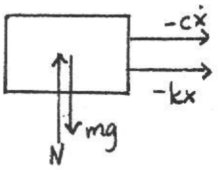
Definiera <u>frekvensen</u> $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ och periodtiden $\tau_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n}$

Fri dämpad svängning

Verkliga system är alltid <u>dissipativa</u>, dvs de förlorar energi med tiden.



Frilägg vagnen.



Stötdämparen (c) påverkar alltså vagnen med en kraft som är motriktad hastigheten och är proportionell mot hastigheten. Proportionalitetskonstanten c kallas <u>dämpningskoefficienten</u>.

Observera skillnaden mot

<u>friktion</u> kraftens storkek oberoende av hastigheten

<u>Luftmotstånd</u> kraften ~ (hastigheten)^2

Vår modell har dock fördelen att den är exakt lösbar.

Newtons andra lag lyder nu

$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$

Vi inför $\omega_n = \sqrt{k/m}$ och <u>dämpfaktorn</u> $\xi = \dfrac{c}{2m\omega_n}$ (dimensionslös)

Differentialekvationen kan då skrivas

$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

Lösningen till denna är relaterad till rötterna till andragradsekvationen

$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$

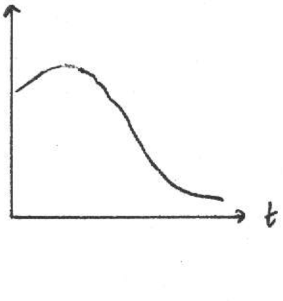
Vi får tre olika fall:

I: $\xi > 1$. Överkritisk dämpning

$$x = A_1 e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 \; 1})\omega_n t} + A_2 e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

godt. koeff

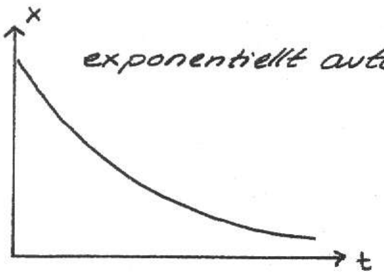
Lösningen är exponentiellt avtagande för stora t



II : $\zeta = 1$ Kritisk dämpning

$$x = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\omega_n t}$$

godt. koeff.



exponentiellt avtagande

För givna värden på $x(0)$ och $\dot{x}(0)$

ger $\zeta = 1$ snabbare dämpning än $\zeta > 1$.

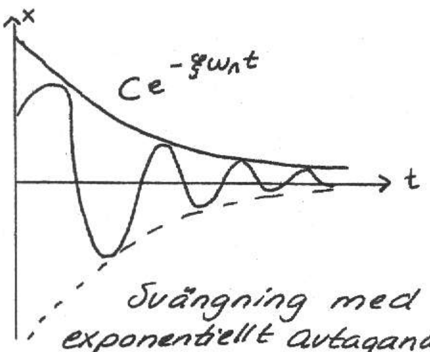
III $0 < \zeta < 1$ Underkritisk dämpning

Inför den dämpade vinkelhastigheten $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

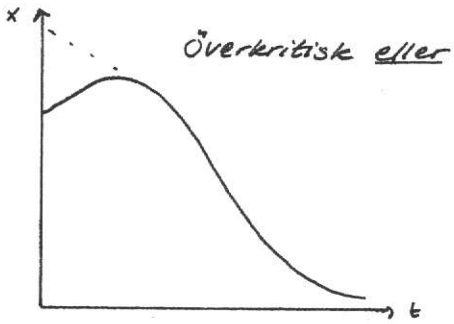
Lösningen kan då skrivas

$$x = (A_3 \cos\omega_d t + A_4 \sin\omega_d t)\, e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$= C\sin(\omega_d t + \Psi)\, e^{-\zeta\omega_n t}$$



Svängning med exponentiellt avtagande amplitud.

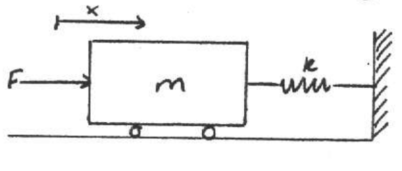


Överkritisk *eller* kritisk dämpning

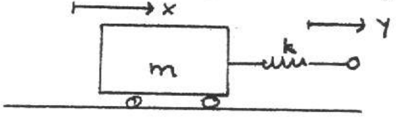
beroende på $x(0)$ och $\dot{x}(0)$ kan initialskedet se olika ut men för stort t får vi alltid en strängt avtagande funktion $e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$ resp $te^{-\omega_n t}$

Tvungna odämpade svängningar

A)

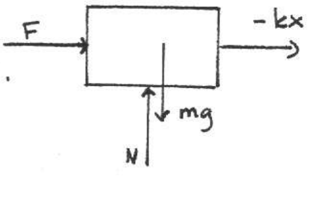


F är en given yttre kraft (funktion av t). En ekvivalent klass av problem är B)



där y är en given funktion av tiden t.

Frilägg vagnen (fall A) och ställ upp rörelseekvationen.

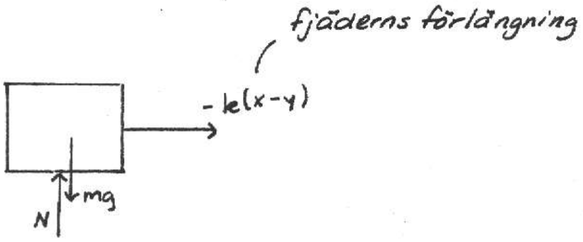


$m\ddot{x} = -kx + F$

med $\omega_n = \sqrt{k/m}$ får vi

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m}$

I fall B får vi



$m\ddot{x} = -k(x-y)$ dvs

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 y$

Matematiskt är dessa differenstialekvationer identiska

Vi använder fortsättningsvis modell A. Allmänna lösningen till en inhomogen ekvation = En partikulärlösning till denna ekvation + allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

$x = x_p + x_h$

partikulärlösning allmän lösning till $\ddot{x} + \omega_n x = 0$

F är en given funktion av tiden. Vi nöjer oss med fallet

$F = F_0 \sin \omega t$

amplitud vinkelfrekvens $\neq \omega_n$

För att finna en partikulärlösning x_p gör vi en ansats

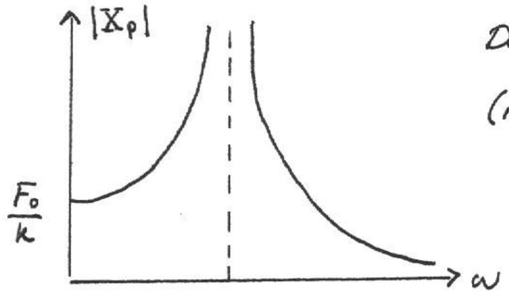
$x_p = X_p \sin \omega t$

amplitud samma vinkelfrekvens som den pålagda kraften

Insättning i ekvationen ger

$$X_p = \frac{F_0 /}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Vi kan plotta $|X_p|$ som funktion av ω (allt annat konstant)



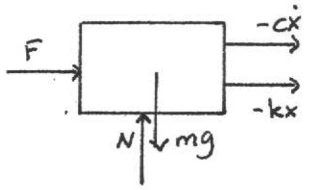
Då $\omega \to \omega_n$ går alltså amplituden $\to \infty$

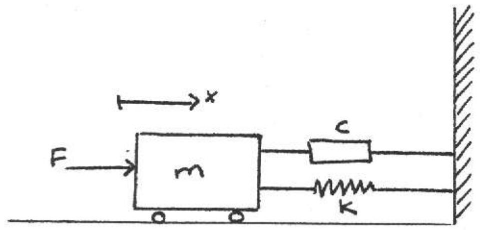
(resonans)

För $\omega < \omega_n$ är $X_p > 0$ dvs x_p är i fas med F

För $\omega > \omega_n$ är $X_p < 0$ dvs x_p är i motfas med F.

Tvungna dämpade svängningar





$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F$ dvs

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m} \quad \text{med} \quad \omega_n = \sqrt{k/m} \quad \text{och} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n}$$

Som tidigare har vi

$$x = x_h + x_p$$

någon partikulärlösn

allmän lösning
till homogenekv

Vi nöjer oss med fallet $F = F_0 \sin\omega t$. Vi gör ansatsen

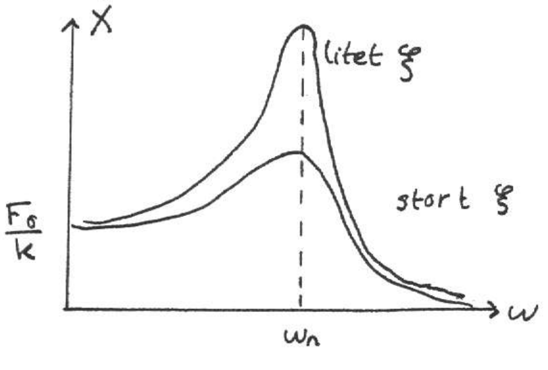
$$x_p = X_1 \sin\omega t + X_2 \cos\omega t = \underset{\text{amplitud}}{X} \sin(\omega t + \phi)$$

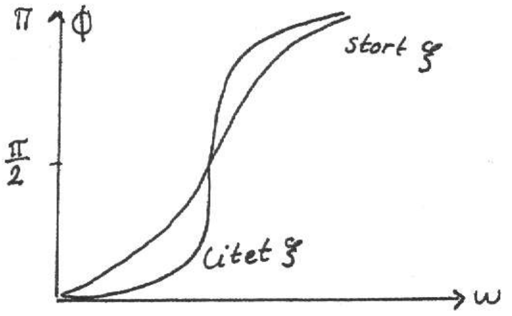
fasförskjutning

Insättning i differentialekvationen ger

$$\begin{cases} X = \dfrac{F_0/k}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}} \\[2ex] \phi = \arctan \dfrac{2\xi\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2} \end{cases}$$

Vi plottar X och ϕ som funktion av ω (allt annat konstant)





Mer allmänna svängande system

(stelkroppssvängningar)

Differentialekvationen $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$ (*) kan beskriva många andra typer av system med en frihetsgrad.

x = någon variabel som beskriver systemets läge

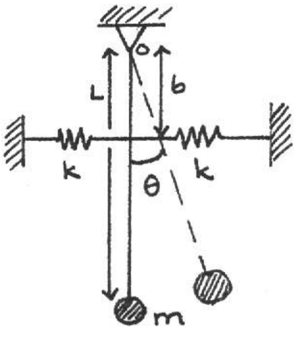
(Behöver inte vara en längdkoordinat)

m, c, k = parametrar som beror av systemet.

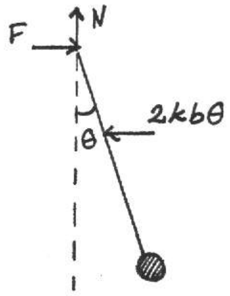
F_0 = amplituden på någon yttre störning.

Lösningarna ser naturligtvis likadana ut.

Exempel 8.74



Ställ upp rörelseekvationen för små svängningar kring jämviktsläget. Vi beskriver systemets läge med vinkeln θ. Frilägg stången med massan. (stångens massa försumbar)



Momentekvationen

$$\overset{\curvearrowleft}{O}: \ -mgl\sin\theta - 2kb\theta b = \underbrace{l^2 m}_{I_0 \text{ för massan } m}\ddot{\theta}$$

För små θ har vi $\sin\theta \approx \theta$ och får då

$$ml^2\ddot{\theta} + (mgl + 2kb^2)\theta = 0$$

Men detta är differentialekvationen för en fri ($F_0 = 0$) odämpad ($c = 0$) svängning. Den allmänna lösningen är

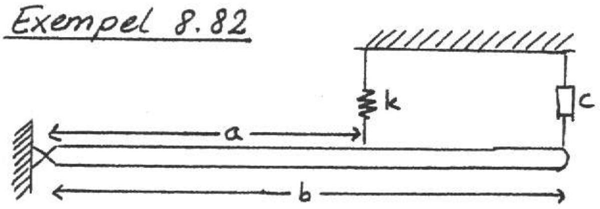
$$\theta = \theta_{max}\sin(\omega_n t + \psi) \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{mgl + 2kb^2}{ml^2}}$$

godt. konst

Obs att ω_n inte har något att göra med $\dot{\theta}$. Koll: $k=0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$

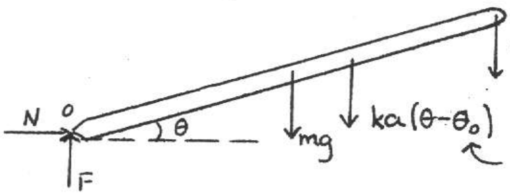
vanlig pendel m längd l.

Exempel 8.82



homogen stång med massa m.

Givet a, b, k, m. Bestäm c så att systemet blir kritiskt dämpat, dvs $\xi = 1$. Vi beskriver stångens läge med vinkeln θ och frilägger:



vinkeln då fjädern är ospänd

Momentekvationen kring 0 för små θ:

$$\circlearrowleft 0: \; -mg\frac{b}{2} - ka(\theta-\theta_0) - cb\dot{\theta}b = \underbrace{\frac{1}{3}mb^2}_{I_0}\ddot{\theta}$$

För att vi skall ha jämvikt då $\theta = 0$ dvs $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ måste det gälla att

$$-mg\frac{b}{2} + ka^2\theta_0 = 0$$

Med detta antagande förenklas ekvationen till

$$\frac{1}{3}mb^2\ddot{\theta} + cb^2\dot{\theta} + ka^2\theta = 0$$

Fri ($F_0 = 0$) dämpad svängning

Karaktäristiska ekvationen är

$$\lambda^2 + \frac{3c}{m}\lambda + \frac{3k}{m}\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 0$$

I allmänhet ser den karaktäristiska ekvationen ut som

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

dämpfaktorn ↗ ↖ naturliga vinkelfrekv.

Vi kan nu läsa av att

$$\omega_n = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad \xi = \frac{3c}{m}\Big/\left(\frac{2a}{b}\sqrt{\frac{3k}{m}}\right) = \frac{bc}{2a}\sqrt{\frac{3}{mk}}$$

Kritisk dämpning betyder att $\xi = 1 \Rightarrow c = \frac{2a}{b}\sqrt{\frac{mk}{3}}$

Energimetoder

För system utan dämpning finns det en enklare metod att ställa upp rörelseekvationen. Betrakta system med en frihetsgrad. Vi beskriver systemets läge med variabeln x. (ej nödvändigtvis en längd.) Vi antar att systemet har ett jämviktsläge och definierar x så att $x=0$ där. Systemets totala mekaniska energi är

$E = T + V$ $T =$ kinetisk energi, $V =$ potentiell energi (från fjädrar, tyngdkr.

Vi vet att $\dot{E} = 0$. Vi undersöker små svängningar kring jämviktsläget $x = \dot{x} = 0$ dvs vi tar x litet och $\dot{x}$ litet.

Vi bestämmer nu T och V och finner att

$T \approx \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{m} \dot{x}^2$ + högre ordningens termer i x och $\dot{x}$.

någon konstant (ej nödvändigtvis en massa)

Eftersom $x=0$ är ett jämviktsläge, måste $V(x)$ ha ett lokalt minimum där, $V'(x) = 0$. Vi kan välja nollnivån för energi så att $V(0) = 0$. Då gäller att

$V(x) = \frac{1}{2} \underset{\nwarrow}{k} \cdot x^2$ + högre ordningens termer i x.

någon konstant.

Vi har alltså

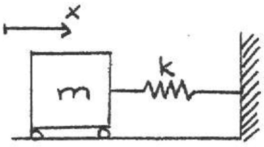
$$E \approx \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$0 = \dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$$

Om vi antar att $\dot{x} \neq 0$ (vi ligger inte alltid stilla i jämviktsläget) får vi alltså en rörelseekvation:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Exempel

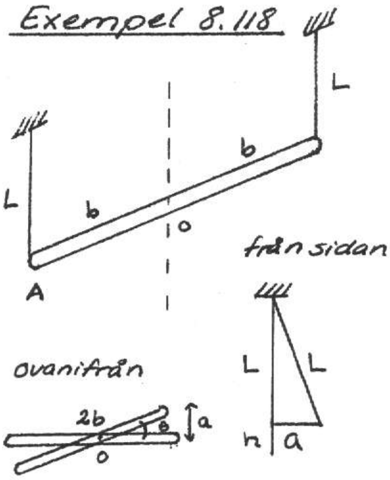


$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ exakt

$V = \frac{1}{2} k x^2$ exakt

$m\ddot{x} + kx = 0$ den exakta rörelseekvationen

Exempel 8.118



Homogen stång med massa m och längd 2b är upphängd i två linor med längden L genom ändpunkterna. Vad blir periodtiden för små svängningar där stången vrider sig kring en vertikal axel genom mittpunkten?

Vi bestämmer kinetisk och potentiell energi:

$$V = mgh = mg(L - \sqrt{L^2 - a^2})$$

$$= mg(L - \sqrt{L^2 - (b\theta)^2})$$

$$= mgL(1 - \sqrt{1 - (\tfrac{b\theta}{L})^2})$$

$$= mgL(1 - (1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{b\theta}{L})^2 + \ldots))$$

$$= \frac{mgb^2}{2L}\theta^2 + \text{högre ordningens termer}$$

Kinetiska energin blir

$$T = \frac{1}{2} m\dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{12} m(2b)^2 \dot{\theta}^2 + \ldots$$

$$= \frac{mb^2}{6}\dot{\theta}^2 + \text{högre ordningens termer}$$

Alltså är $E = T + V \approx \frac{mb^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{mgb^2}{2L}\theta^2$

$$0 = \dot{E} = \dot{\theta}\left(\frac{mb^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{mgb^2}{L}\theta\right)$$

Rörelseekvationen blir

$$\frac{mb^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{mgb^2}{L}\theta = 0$$

Fri odämpad svängning kring $\theta = 0$ med naturlig vinkelfrekvens

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgb^2}{L} \Big/ \frac{mb^2}{3}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Oberoende av b!

Periodtiden

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}$$

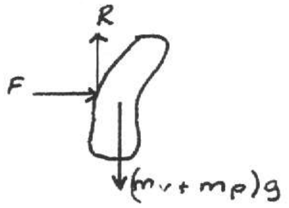
Tenta Style

4.48 Vi betraktar ett system bestående av pumpen med massa $m_p = 310$ kg, det inneslutna vattnet med massa $m_v = \rho \pi r^2 h$, (där $\rho = 1000$ kg/m³, $r = 0,1$ m, $h = 6$ m) samt en liten mängd vatten med massan $\Delta m = \rho v' \Delta t$, där $v' = 0,125$ m³/s och Δt är ett litet tidsintervall. Vi betraktar systemet vid tiden t och $t + \Delta t$

t

$t + \Delta t$

Frilägg systemet:



De yttre krafternas impuls i vertikalled under tidsintervallet Δt är

$$(R - (m_v + m_p)g)\,\Delta t$$

Detta skall vara lika med ändringen ΔG av vertikalkomponenten av systemets rörelsemängd

$$\Delta G = \Delta m v_2 \cos 45° - \Delta m v_1 = \rho v' \Delta t \left(\frac{v'}{\pi r_2^2} \cos 45° - \frac{v'}{\pi r_1^2} \right)$$

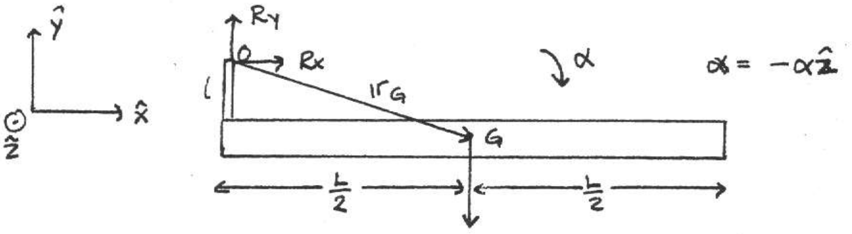
$$\text{där} \begin{cases} r_2 = 0,050 \text{ m} \\ r_1 = 0,125 \text{ m} \end{cases}$$

Vi får alltså att

$$R = (m_v + m_p)g + \rho v' \left(\frac{v'}{\pi r_2^2} \cos 45° - \frac{v'}{\pi r_1^2} \right) = (\rho \pi r^2 h + m_p)g +$$

$$+ \frac{\rho (v')^2}{\pi} \left(\frac{1}{r_2^2} \cos 45° - \frac{1}{r_2^2} \right) \quad N$$

6.60 Vi frilägger balken med dess upphängning:



Balkens tröghetsmoment

$$I_G = \int dm\, x^2 = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \frac{m}{L} x^2 = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3L}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \frac{mL^2}{12}$$

$I_G = \frac{1}{12} mL^2$ map tyngdpunkten

$$I_o = I_G + md^2 = I_G \overset{+}{=} m\left(l^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{3} mL^2 + ml^2$$

(Kontroll: $l = 0 \Rightarrow I_o = \frac{1}{3} mL^2$, $L = 0 \Rightarrow I_o = ml^2$

Momentekvationen kring O ger

$$\circlearrowright:\quad mg\frac{L}{2} = I_o \cdot \alpha$$

Varur fås att $\alpha = \frac{mgL}{2I_o} = \frac{mgL}{\frac{2}{3}mL^2 + 2ml^2} = \frac{3gL}{6l^2 + 2L^2}$

Newtons andra lag ger

$$\begin{cases} \uparrow: & R_Y - mg = -m\frac{L}{2}\alpha \\ \rightarrow: & R_x = -ml\alpha \end{cases}$$

Tyngdpunktens acceleration:

$$\mathbb{a}_G = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbb{r}_G = -\alpha\hat{z} \times \left(\frac{L}{2}\hat{x} - l\hat{y}\right)$$

$$= -\alpha\frac{L}{2}\hat{y} - \alpha l\hat{x}$$

Härur fås

$$R_x = mg\frac{3lL}{6l^2 + 2L^2}$$

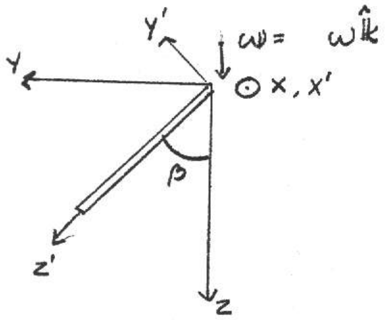
$$R_y = mg\cdot\frac{6l^2 + \frac{1}{2}L^2}{6l^2 + 2L^2}$$

Kontroll: $R_x = 0$ om $l = 0$ eller $L = 0$

$R_y = mg$ om $L = 0$

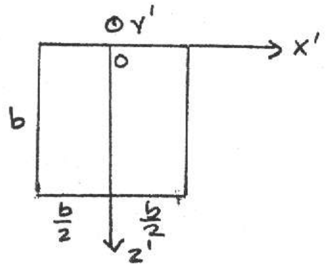
7.88 Systemet sett "från sidan"

Förutom de givna x, y, z-axlarna inför vi nya x'y'z'-axlar längs med plattans huvudtröghetsaxlar



Plattans huvudtröghetsmoment är

$$\begin{cases} I_{z'z'} = \frac{1}{12} m b^2 \\ I_{y'y'} = \frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{3} m b^2 \\ I_{x'x'} = ? \end{cases}$$



Vi uttrycker ω i enhetsvektorerna $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ längs med x', y', z'-axlarna.

$$\omega = \omega\hat{k} = \omega(\cos\beta\,\hat{k}' - \sin\beta\,\hat{j}') = \omega_{z'}\hat{k}' + \omega_{y'}\hat{j}'$$

Rörelsemängdsmomentet blir (map O)

$$H = I_{z'z'}\omega_{z'}\hat{k}' + I_{y'y'}\omega_{y'}\hat{j}' = \frac{1}{12} m b^2 \omega \cos\beta\,\hat{k}' + \left(\frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{3} m b^2\right)(-\omega\sin\beta)\hat{j}'$$

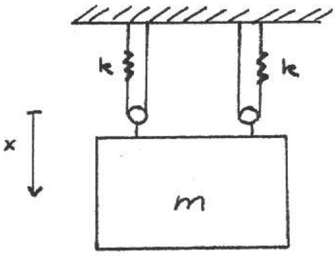
$$= \frac{1}{12} m b^2 \omega \cos\beta(\cos\beta\,\hat{k} + \sin\beta\,\hat{j}) + \left(\frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{3} m b^2\right)(-\omega\sin\beta)(-\sin\beta\,\hat{k} + \cos\beta\,\hat{j})$$

$$= \omega m b^2\left(\frac{1}{12}\cos^2\beta + \frac{1}{12}\sin^2\beta + \frac{1}{3}\sin^2\beta\right)\hat{k} + \omega m b^2 \sin\beta\cos\beta\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right)\hat{j}$$

Momentekvationen för plattan (kring O) säger nu att:

$$M_O = \dot{H}_O = \omega \times H_O = \omega\hat{k} \times \left(-\frac{1}{3} m b^2 \omega \sin\beta\cos\beta\right) = -\frac{1}{3}\omega^2 m b^2 \sin\beta\cos\beta\,\hat{i}$$

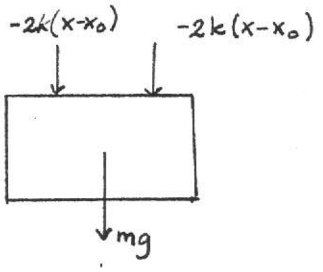
8. 24



Bestäm den naturliga vinkelfrekvensen ω_n.

Två metoder.

1) Frilägg



x_0 = x-värdet då fjädern är ospänd.

Rörelseekvationen

$m\ddot{x} = mg - 4k(x-x_0)$

dvs $m\ddot{x} + 4kx = mg + 4kx_0$

Den allmänna lösningen är

$x = x_c + x_p$ där

$x_c = A\sin(\omega_n t + \Psi)$ där $\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m}}$

och

x_p är någon partikulärlösning t. ex

$x_p = \frac{mg}{4k} + x_0$ = konstant

2) Energimetod. Total mekanisk energi är bevarad