Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 8 januari 2025 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15:00 och 16:00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

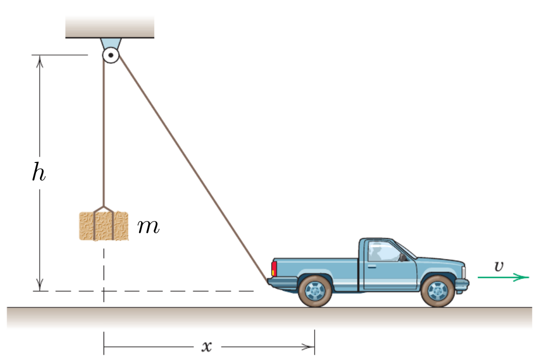
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Torsdagen 30 januari, kl 12.30-13.00 i FL61.

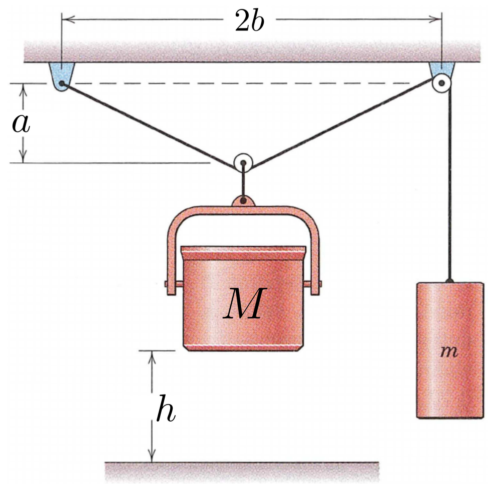
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

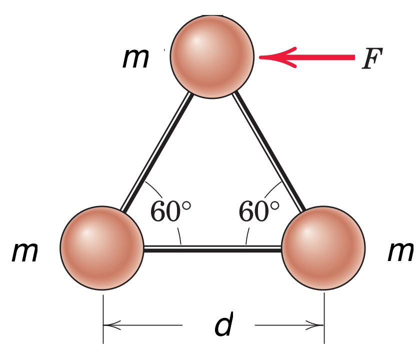
1. Bilen används för att dra upp en låda med massan m. Om bilen har den konstanta hastigheten v vid $x = l$, beräkna spänningen T i repet i detta läge.



2. Systemet släpps i vila i det avbildade läget. Bestäm massan m så att massan M precis kommer att vidröra underlaget innan den vänder.



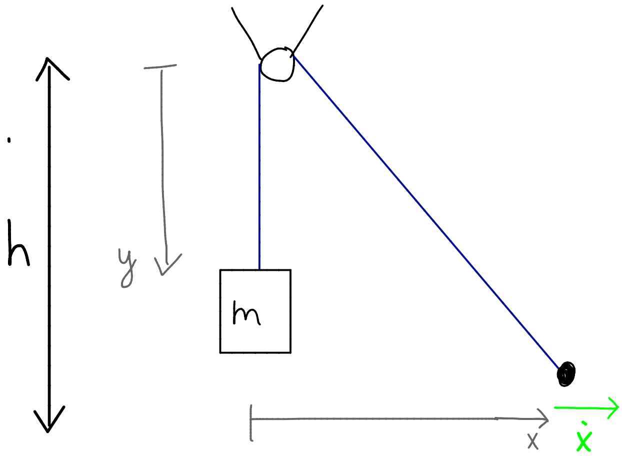
3. Tre identiska sfärer, vardera med massan m, är stelt ihopsatta med tre stavar, vilkas massa kan försummas. Systemet ligger på ett bord enligt figuren (dvs alla klot ligger på bordet och befinner sig i samma horisontella plan) och friktionen mellan sfärerna och bordet kan försummas. Sfärerna är i vila då en kraft F appliceras på den översta sfären enligt figuren. Beräkna accelerationen $\bar{a}$ hos sfärernas masscentrum, vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ runt masscentrum och accelerationen a hos den översta sfären *just efter* kraften börjat verka på systemet (dvs då sfärerna ännu inte hunnit flytta sig jämfört med positionerna i figuren).



Lycka till!

U1

Låt repets okända längd betecknas L.



Geometrin ger då villkoret

$$L = y + \sqrt{x^2+h^2}$$

från vilket vi kan räkna ut

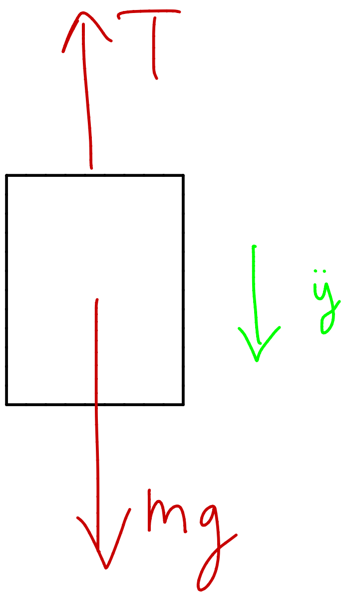
$$\dot{y} = -\frac{x \cdot \dot{x}}{\sqrt{x^2+h^2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{\dot{x}^2 + x \cdot \ddot{x}}{\sqrt{x^2+h^2}} + \frac{x^2 \dot{x}^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

Vid läget där bilen nått konstant hastighet har vi

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = v \\ x = \ell \end{cases} \Rightarrow \ddot{y}(x=\ell) = -\frac{v^2}{\sqrt{\ell^2+h^2}} + \frac{\ell^2 v^2}{(\ell^2+h^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{v^2 h^2}{(\ell^2+h^2)^{3/2}}$$

(Notera att $\ddot{y}<0$, dvs lådan rör sig uppåt med koordinatsystemet som i figuren.)



Friläggning av lådan ger nu rörelseekv:

$$\downarrow \quad m\ddot{y} = mg - T \Rightarrow \boxed{T = mg + \frac{mv^2h^2}{(\ell^2+h^2)^{3/2}}}$$

har enhet

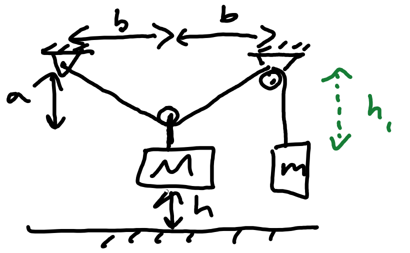
$$\frac{kg\frac{m^2}{s^2}m^2}{m^3} = \frac{kg\,m}{s^2} \quad \text{ok!}$$

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Massa M, dimensioner a, b, h.

Sökt: Massa m så att M vänder precis innan den slår i marken.

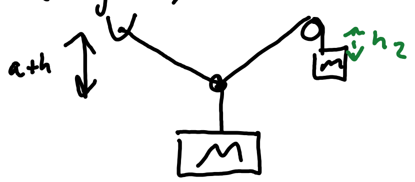
Figur:



Lösning: Snörets längd, L, konstant. I första läget har vi:

$$L = 2\sqrt{a^2+b^2} + h_1.$$

Figur (läge 2)



I andra läget har vi

$$L = 2\sqrt{(a+h)^2+b^2} + h_2.$$

dvs $h_1 - h_2 = 2\sqrt{(a+h)^2+b^2} - 2\sqrt{a^2+b^2}$

Endast gravitationen utför något arbete (och är konservativ) så vi kan använda energikonservering.

Vid båda tillfällen är massorna i vila, endast potentiell energi.

$$V_1 = Mgh$$

$$V_2 = mg(h_1 - h_2) = 2mg\left(\sqrt{(a+h)^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$V_1 = V_2 \Rightarrow$

$$m = \frac{Mh}{2\left(\sqrt{(a+h)^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right)} = \frac{M}{2}\,\frac{\left(\sqrt{(a+h)^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2}\right)}{2a+h}$$

Kontroller: $[m] = [M]\dfrac{[\text{längd}]}{[\text{längd}]} = \text{kg}$, bra!

$b \to 0 \Rightarrow m = \dfrac{M}{2}$, bra!

$a, h \to 0 \Rightarrow m \to \infty$, bra!

$h \to 0 \Rightarrow m \to \dfrac{M}{2}\underbrace{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}_{1/\sin\theta}$, rimligt!

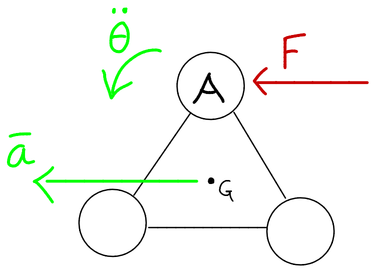
Svar: För att precis vidröra marken när vikterna vänder behöver

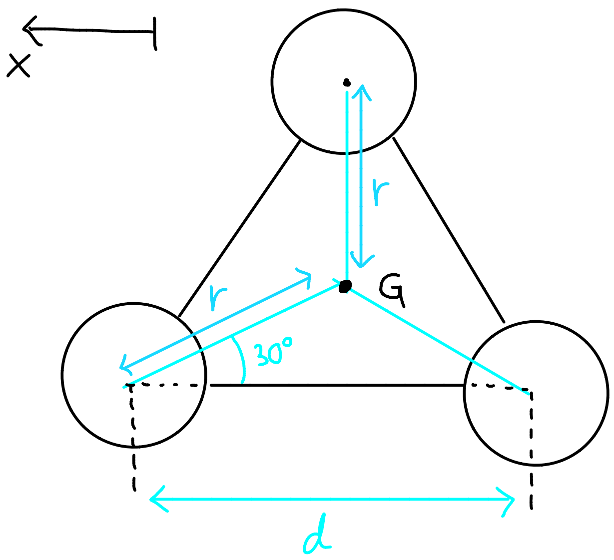
Svar: För att precis vidröra marken när vikterna vänder behöver

$$m = \frac{M}{2} \frac{\sqrt{(a+h)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}}{2a + h}$$

3)

Frilägning:





$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{d}{2r} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

Rörelseekvationen för masscentrum är

$$F\hat{x} = 3m\bar{a} \Rightarrow \boxed{\bar{a} = \frac{F}{3m}\hat{x}}$$

$$[\bar{a}] = \frac{kg\,m}{kg\,s^2} = \frac{m}{s^2}$$

Kraften F skapar ett moment kring tyngdpunkten G, vilket ger en vinkelacceleration för systemet enligt

$$\dot{H}_G = M$$

Rörelsemängdsmomentet H_G och momentet M ges av

$$H_G = 3mr^2\dot{\theta} = md^2\dot{\theta}$$

$$M = r \cdot F = \frac{\sqrt{3}}{3}dF$$

$$\Rightarrow \quad \dot{H}_G = md^2\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}dF \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}F}{3md}}$$

$$[\ddot{\theta}] = \frac{\frac{kg\,m}{s^2}}{kg\,m} = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_A} = \bar{a} + r\ddot{\theta}\hat{x} = \left(\frac{F}{3m} + \frac{F}{3m}\right)\hat{x} = \boxed{\frac{2F}{3m}\hat{x}}$$

$$[a_A] = [\bar{a}] = \frac{m}{s^2}$$