Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Fredagen den 23 augusti 2024 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15:00 och 16:00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, . . ., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

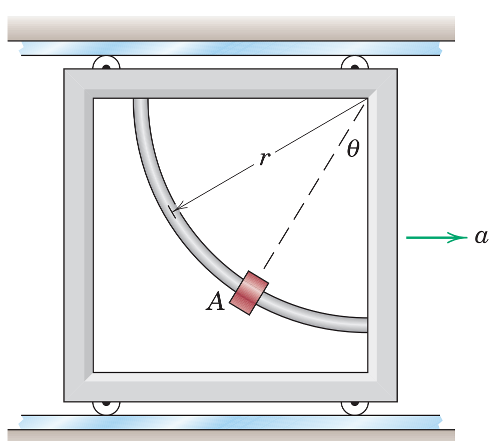
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Onsdagen 18 september, kl 12.30-13.00 i FL61.

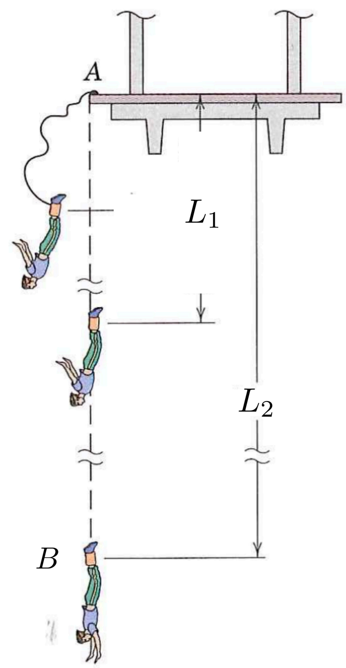
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

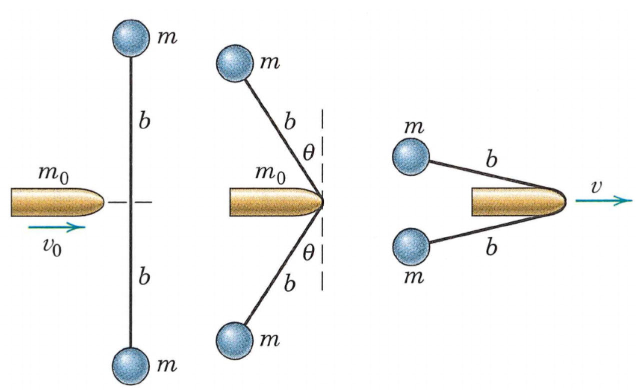
1. En ring A, med massan m, kan glida friktionsfritt längs en kvartscirkelformad ståltråd med radie r, vilken är fastsatt i en kvadratisk ram enligt figuren. Bestäm vinkeln θ då ringen är i jämvikt om ramen har accelerationen a åt höger.



2. En bungee-hoppare med massan m hoppar från en bro vid punkten A där bungee-linan är fäst. Hen faller längden L_1 innan bungee-linan börjar dras ut (dvs bungee-linans längd när man inte drar i den är L_1) och når som mest till längden L_2 under bron innan hen studsar upp. Betrakta bungee-linan som en fjäder med fjäderkonstanten k. Beräkna fjäderkonstanten k samt hopparens maximala hastighet och var denna inträffar. Försumma alla energiförluster t ex i bungee-linan, p g a luftmotstånd etc. Personen kan betraktas som punktformig.



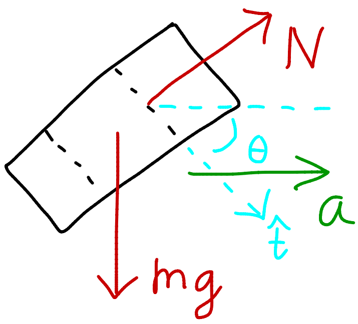
3. De båda kulorna har vardera massan m och är förenade genom en masslös lina med längden $2b$. De ligger i vila på ett glatt horisontellt underlag när linans mittpunkt träffas av en projektil med massan m_0 och hastigheten v_0. Bestäm projektilens hastighet v samt tidsderivatan $\dot{\theta}$ för vinkeln θ i ögonblicket omedelbart innan de båda kulorna träffar varandra (d v s då θ är nästan 90°).



Lycka till!

1)

När ringen är i jämvikt i ramen rör den sig inte längs stålträden, och accelererar därför tillsammans med ramen.
Friläggning av ringen i jämvikt:



Genom att skriva rörelseekvationen i $\hat{t}$-led elimineras normalkraften N direkt:

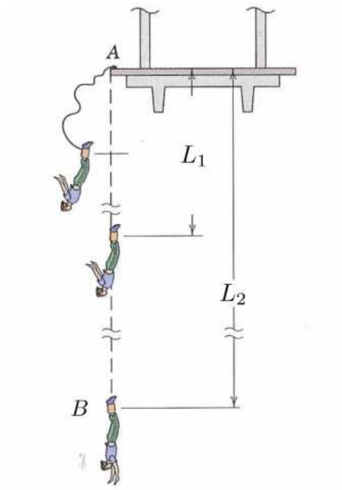
$$\hat{t} \searrow: \quad mg\sin(\theta) = ma\cos(\theta)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$$

Uppg 2

En bungee-hoppare med massan m hoppar från en bro vid punkten A där bungee-linan är fäst. Hen faller längden L_1 innan bungee-linan börjar dras ut (dvs bungee-linans längd när man inte drar i den är L_1) och når som mest till längden L_2 under bron innan hen studsar upp. Betrakta bungee-linan som en fjäder med fjäderkonstanten k. Beräkna fjäderkonstanten k samt hopparens maximala hastighet och var denna inträffar. Försumma alla energiförluster t ex i bungee-linan, p g a luftmotstånd etc. Personen kan betraktas som punktformig.



Lösning

När bungee-hopparen står på plattformen är rörelseenergin noll. Vid B har hen förflyttat sig en total sträcka L_2 vilket ger en förändring i potentiell energi av $\Delta V_{mg} = -mgL_2$.

Bungee-linan har nu sträckts en längd $L_2 - L_1$ från sitt jämviktläge och ger därför en förändring av potentiell energi $\Delta V_{\text{bungee}} = \frac{1}{2}k(L_2 - L_1)^2$.

När hopparen når B är farten momentant noll vilket ger att skillnaden i rörelseenergi är noll. Eftersom inga andra krafter verkar så har vi ekvationen

$$\Delta E = \Delta V_{\text{bungee}} + \Delta V_{mg} = 0$$

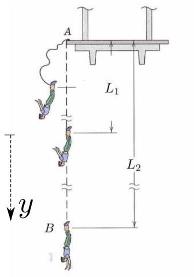
$$\frac{1}{2}k(L_2 - L_1)^2 - mgL_2 = 0$$

vilket vi kan lösa för k:

$$k = \frac{2mgL_2}{(L_2 - L_1)^2}$$

$$\left([k] = \frac{\text{kg}\frac{m}{s^2}\,m}{m^2} = \frac{\text{kraft}}{\text{meter}}\right)$$

Låt y beteckna hopparens position relativt linans jämviktsläge och v hens fart.



För $y < (L_2 - L_1)$ kommer farten vara nollskilld och rörelseenergin ges av $T = \frac{mv^2}{2}$. Energiprincipen ger nu

$$\begin{aligned}
\Delta E = \Delta V_{mg} + \Delta V_{\text{bungee}} + \Delta T &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
-mg(L_1 + y) + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{mv^2}{2} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
v(y) &= \sqrt{2g(L_1 + y) - \frac{2gL_2}{(L_2 - L_1)^2}y^2}
\end{aligned}$$

För att hitta maximum av $v(y)$ deriverar vi en gång

$$\dot{v} = \frac{g - 2\frac{gL_2}{(L_2 - L_1)^2}y}{\sqrt{2g(L_1 + y) - \frac{2gL_2}{(L_2 - L_1)^2}y^2}}$$

Extrempunkten är därför

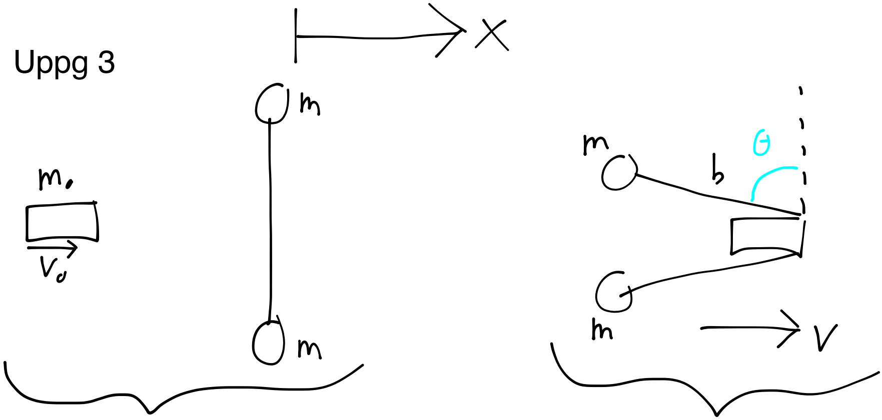
$$\begin{aligned}
\dot{v} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
y_{\max} &= \frac{1}{2}\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}
\end{aligned}$$

Insättning i $v(y)$ ger sedan

$$\begin{aligned}
v_{\max} = v(y_{\max}) &= \sqrt{2g\left(L_1 + \frac{1}{2}\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}\right) - \frac{2gL_2}{(L_2 - L_1)^2}\frac{1}{4}\left(\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}\right)^2} \\
&= \sqrt{2g\left(L_1 + \frac{1}{2}\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}\right) - \frac{1}{2}g\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}} \\
&= \sqrt{2gL_1 + \frac{1}{2}g\frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2}} \\
&= (L_1 + L_2)\sqrt{\frac{g}{2L_2}}
\end{aligned}$$

$$\left([v_{\max}] = m\sqrt{\frac{\frac{m}{s^2}}{m}} = \frac{m}{s}\right)$$

Uppg 3



1 2

$$G_1^x = m_0 V_0$$
$$E_1 = \frac{m_0 V_0^2}{2}$$

$$G_{12}^x = (2m + m_0)V$$
$$E_2 = \frac{m_0 V^2}{2} + \frac{2m\left(\sqrt{V^2 + (b\dot{\theta})^2}\right)^2}{2}$$
$$= \left(\frac{m_0}{2} + m\right)V^2 + m b^2 \dot{\theta}^2$$

$$G_1^x = G_{12}^x \Rightarrow \boxed{V = \frac{m_0 V_0}{2m + m_0}}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{m_0 V_0^2}{2} = \left(\frac{m_0}{2} + m\right)V^2 + m b^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{1}{mb^2}\left(\frac{m_0 V_0^2}{2} - \frac{\left(\frac{m_0}{2} + m\right)}{(2m + m_0)^2} m_0^2 V_0^2\right) = \frac{V_0^2}{mb^2}\left(\frac{m_0}{2} - \frac{m_0^2}{2(2m + m_0)}\right)$$
$$= \frac{V_0^2}{mb^2}\left(\frac{m_0(2m + m_0) - m_0^2}{2(2m + m_0)}\right)$$
$$= \frac{V_0^2}{b^2}\frac{m_0}{2m + m_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{V_0}{b}\sqrt{\frac{m_0}{2m + m_0}}}$$