Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Torsdagen den 4 januari 2024 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

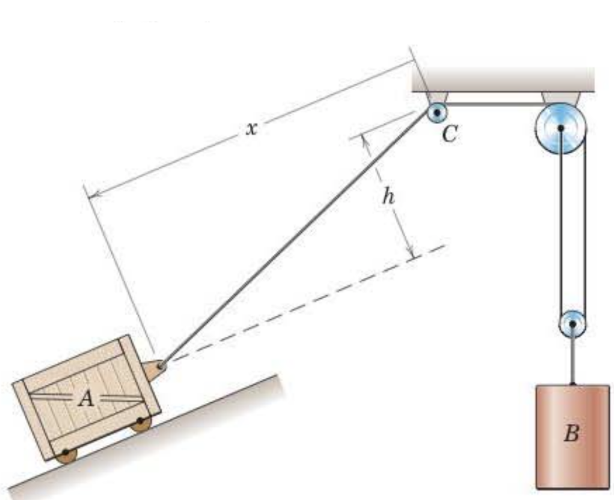
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredagen 26 januari kl 12.30-13.00 i FL61.

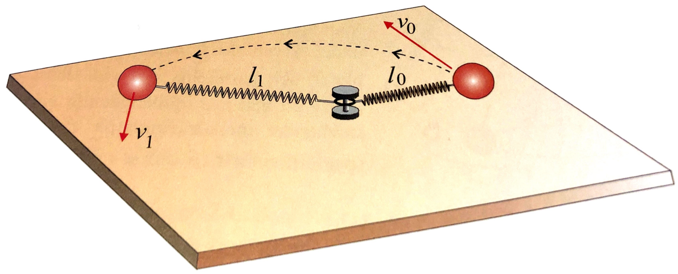
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

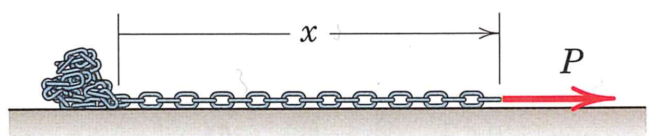
1. Härled ett uttryck för hastigheten v_A hos vagnen A i termer av hastigheten v_B hos vikten B. Låt hastigheten v_A vara positiv nedför backen (notera att sträckan x i figuren är positiv nedför backen), och hastigheten v_B vara positiv uppåt.



2. En partikel med massan m rör sig på en glatt horisontell yta. Partikeln är fäst i en lätt fjäder med fjäderkonstanten k och den ospända längden l_0. Fjädern är ospänd från början och partikeln ges en horisontell hastighet v_0 i en riktning vinkelrätt mot fjädern. Bestäm denna hastighet om den maximala längden av fjädern under rörelsen är $l_1 = 2l_0$. Svara i termer av l_0, k och m.



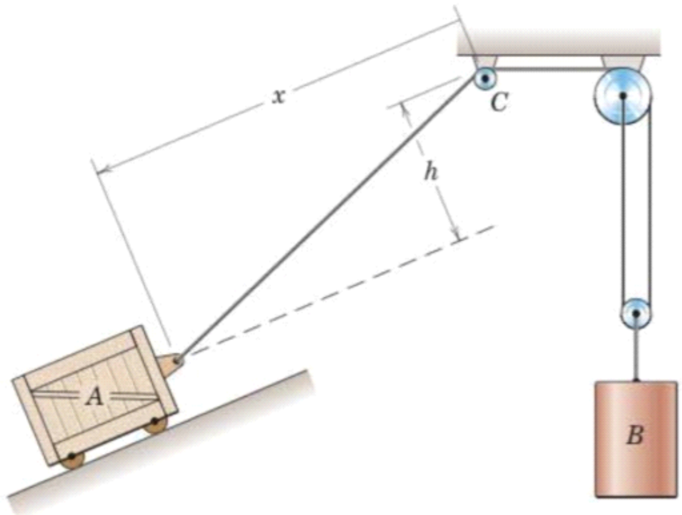
3. Ena änden av en kedja med densiteten ρ (massa per längdenhet) dras horisontellt längs en yta av en konstant kraft P, se figuren nedan. Givet att den dynamiska friktionskoefficienten mellan kedjan och ytan är μ_k, bestäm accelerationen $\ddot{x}$ hos kedjans högra ändpunkt som en funktion av x och $\dot{x}$.



Lycka till!

1

Härled ett uttryck för hastigheten v_A hos vagnen A i termer av hastigheten v_B hos vikten B. Låt hastigheten v_A vara positiv nedför backen, och hastigheten v_B vara positiv uppåt.



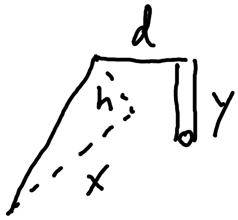
Sökt: $v_A(v_B)$

Givet: h, x.

Plan: Trångsvillkor – derivera

Lösning:

Inför sträckorna d och y enligt figur.



Längden på linan,

$$L = \sqrt{x^2+h^2} + d + 2\dot{y},$$

måste vara konstant. Derivering m.a.p. tid ger:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+h^2}}\dot{x} + 0 + 2\dot{y}$$

Hastigheten v_A positiv nedför backen $\Rightarrow v_A = \dot{x}$.

Hastigheten v_B positiv uppåt $\Rightarrow v_B = -\dot{y}$. obs!

$$\Rightarrow 0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} v_A - 2 v_B$$

$$\Rightarrow \boxed{v_A = 2 v_B \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}}$$

$[m/s] \frac{[m]}{[m]}$, ok!

Kontroller: om A rör sig nedåt så rör sig B uppåt, bra

$\approx 2 v_B$ för små h, bra

större för stora h, rimligt

Svar: Hastigheten hos vagnen nedför backen blir

$$v_A = 2 v_B \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}.$$

2

<u>Sökt</u>: farten v_0 i punkten l_0

<u>Givet</u>: längd l_0, fjäderkonstant k, massa m.

<u>Plan</u>: Energi och RMM-bevaring.

<u>Lösning</u>: Energin i systemet är bevarad då den enda kraft som utför arbete är fjäderkraften, vilken är konservativ. Rörelsemängdsmomentet (RMM) kring mittpunkten (O) är bevarad då den resulterande kraften på kulan (fjäderkraften) alltid har sin verkningslinje genom denna.

Energibevaring:	Potentiell energi	Kinetisk energi
Läge 0	$V_0 = 0$	$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$
Läge 1	$V_1 = \frac{1}{2} k \underbrace{\Delta x^2}_{\text{utsträckt längd}}$	$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$

där $\Delta x = l_1 - l_0 = l_0$

Energin bevarad innebär att

$$V_0 + K_0 = V_1 + K_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k l_0^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad (1)$$

RMM-bevaring:

$$RMM|_0 = l_0 \cdot m v_0$$
$$RMM|_1 = l_1 \cdot m v_1$$

OBS! I båda dessa punkter är hastigheten vinkelrät mot ortsvektorn. I punkt 0 givet i uppgiftstext och i punkt 1 av att det är max-läge (dvs ingen "radiell" fart)

$$RMM|_0 = RMM_1$$

$$\Rightarrow l_0 m v_0 = l_1 m v_1 \ldots$$

och i punkt 1 är det vi har höjt
(dvs ingen "radiell" fart)

$$\Rightarrow l_0 m v_0 = l_1 m v_1$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{l_0}{l_1} v_0 \overset{l_1 = 2 l_0}{=} \frac{1}{2} v_0$$

Insatt i (1) ger oss

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k l_0^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow m v_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = k l_0^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{4}{3} \frac{k}{m} l_0^2$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{k}{m}}\, l_0$$

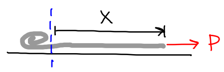
Kontroller: Enhet $[v_0] = 1 \cdot \frac{(kg/s^2)^{1/2}}{(kg)^{1/2}} \cdot m = m/s$, bra!

Större med större k, och l_0 (svarar mot större energier)
mindre med större m (trögare) rimligt!

Svar: Farten var

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{k}{m}}\, l_0$$

3 Givet: linjedensiteten ρ [kg/m], ~~kraften~~ P samt dynamiska friktionskoefficienten μ_k.

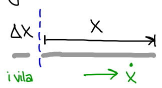


Sökt: Acceleration $\ddot{x}$ som funktion av x och $\dot{x}$.

Lösning:

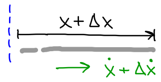
Avgränsa ett system och analysera under ett litet förlopp Δt.

1. Vid t:



utdragen kedja + liten kedjebit Δx som precis ska dras ut

2. Vid $t+\Delta t$:



I infinitesimalgränsen har vi att: $\Delta x = \dot{x}\,\Delta t \quad \Delta\dot{x} = \ddot{x}\,\Delta t$

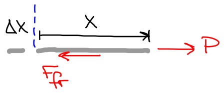
Totala rörelsemängder i horisontellt led:

$$G_1 = \rho x \cdot \dot{x} + \rho \Delta x \cdot 0 = \rho x \dot{x}$$

$$G_2 = \rho(x+\Delta x)\cdot(\dot{x}+\Delta\dot{x}) = \rho x(\dot{x}+\Delta\dot{x}) + \rho\Delta x\dot{x} + \rho\,\Delta x\,\Delta\dot{x}$$

andra ordningens term vilken kan försummas i infinitesimalgränsen $\Delta t \to 0$

Externa krafter i horisontellt led:



friktionskraften på kedjebiten kan försummas enligt nedan

$$F_{fr} = \mu_k \cdot g\rho(x + \Delta x)$$

normalkraften = tyngdkraften

Resulterande kraft (i x-led)

$$F = P - F_{fr} = P - \mu_k g\rho(x+\Delta x)$$

Impulslagen under förloppet $t \to t+\Delta t$ ger:

$$G_2 = G_1 + F\Delta t = G_1 + (P - \mu_k g\rho(x+\underbrace{\Delta x))\Delta t})$$

andra ordningens term vilken kan försummas i infinitesimalgränsen

Utan andra ordningens termer får vi:

$$\rho x(\cancel{\dot{x}}+\Delta\dot{x}) + \rho\Delta x\dot{x} = \cancel{\rho x\dot{x}} + (P - \mu_k g\rho x)\Delta t$$

$$\Leftrightarrow \quad P - \mu_k g\rho x = \rho x\frac{\Delta\dot{x}}{\Delta t} + \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}\dot{x} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \rho x\ddot{x} + \rho\dot{x}^2$$

Svar $\quad \ddot{x} = \dfrac{1}{\rho x}\left(P - \mu_k g\rho x - \rho\dot{x}^2\right)$

Kontroller:

$[\mu_k g\rho x] = 1 \cdot N/kg \cdot kg/m \cdot m = N$

$[\rho\dot{x}^2] = kg/m \cdot m^2/s^2 = kg\,m/s^2 = N$

$\Rightarrow [\ddot{x}] = \dfrac{1}{kg/m \cdot m}\cdot N = m/s^2$ OK!

$\ddot{x}$ ökar med P samt minskar med μ_k och ρ OK!