

Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Torsdagen den 24 augusti 2023 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Ulf Gran

Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

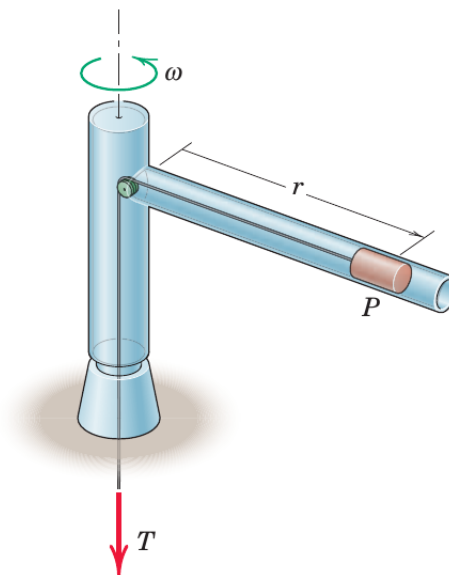
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Måndagen 18 september kl 12.30-13.00 i FL61.

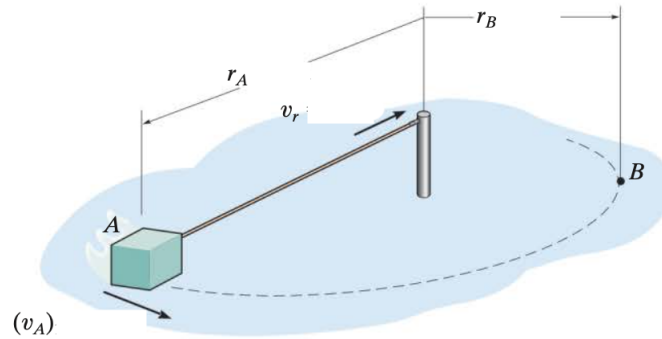
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g .

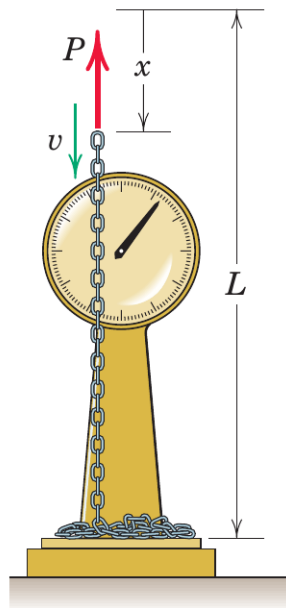
1. Ett ihåligt rör roterar runt vertikalaxeln med en vinkelhastighet $\omega = \dot{\theta}$ och vinkelaccelerationen $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Cylindern P med massan m glider friktionslöst inuti röret och dras av linan inåt mot centrum. Beräkna spänningen T i linan och den horisontella kraften F_θ som röret utövar på cylindern i termer av $m, r, \dot{r}, \ddot{r}, \omega$ och $\dot{\omega}$.



2. En låda med massan m rör sig längs en cirkelbana med radien r_A och med en hastighet v_A . Då lådan passerar punkten A börjar repet dras in och ger lådan en (konstant) radiell acceleration så att lådan har den radiella hastigheten v_r i punkten B . Bestäm lådans *fast* då radien minskat till r_B . Bestäm även det arbete som utförs genom att dra in repet mellan position A och B för lådan. Försumma friktion och lådans utsträckning.



3. En kedja med längd L och massa ρ per längdenhet släpps ned på en våg med den konstanta farten v . Beräkna kraften R som vågen visar som funktion av x . (Kraften P i figuren är den kraft som behöver appliceras för att kedjan ska hålla konstant fart. Kraften P behöver ni inte räkna ut.)



Lycka till!

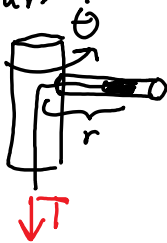
Uppgift 1

Lösningförslag på tentamen
Mekanik 1

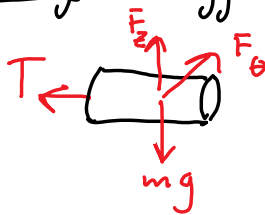
Givet: vinkelhastighet $\dot{\theta}$, vinkelacceleration $\ddot{\theta}$, massa m , radiell position och derivator \dot{r}, \ddot{r} .

Sökt: Spänning T i linan och horisontell kraft F_{θ} från röret.

Figur:



Lösning: Frilägg cylindern



Kraftekvationer:
$$\begin{cases} -T = m a_r \\ F_{\theta} = m a_{\theta} \end{cases}$$

I polära koordinater:
$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_{\theta} &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}$$

Insatt ger

$$\begin{cases} T = m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) \\ F_{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$$

Kontroller: $[T] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$, ok \checkmark

$[F_{\theta}] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$, ok \checkmark

Svar: Spänningen blir

$$T = m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})$$

och den horisontella kraften

$$F_{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

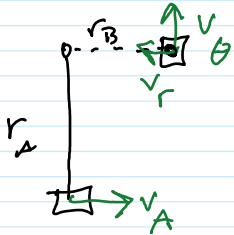
2

Sökt: fart i B $|v_B|$, arbete W_{AB}

Givet: m, r_A, r_B, v_A, v_r

Plan: RMM (bevarad), Energiprincipen (arbete)

Lösning:



Rörelsemängdsmoment i A (kring centrum) $H_A = m r_A v_A$ | RMM i B $H_B = m r_B v_\theta$
 (komponenten i vinkel led)

(notera att radiell hastighet inte påverkar RMM)

Energi i A

$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2$$

Energi i B

$$E_B = \frac{1}{2} m v_\theta^2 + \frac{1}{2} m v_r^2$$

Kraften i linan utövar ett arbete, men påverkar inte RMM (tillför inget moment kring centrum som verkningslinjen går genom)

$$\text{RMM bevarat} \Rightarrow H_A = H_B \Rightarrow v_\theta = v_A \frac{r_A}{r_B} \quad (1)$$

$$\text{Fartens i B ges av } |v_B| = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} = \sqrt{\left(v_A \frac{r_A}{r_B}\right)^2 + v_r^2}$$

Arbete utövat*

$$W_{AB} = E_B - E_A = \frac{1}{2} m (v_\theta^2 + v_r^2 - v_A^2) = \frac{1}{2} m v_A^2 \left(\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 - 1 \right) + \frac{1}{2} m v_r^2$$

Kontroller: enhet $\left[v_A \frac{r_B}{r_A} \right] = \frac{m}{s} \frac{m}{m} = m/s$, bra

$$[m v^2] = \text{kg} \frac{m^2}{s^2} = \text{J}, \text{ bra}$$

$$v_\theta > v_A, \text{ bra}$$

$W_{AB} > 0$, d.v.s. tillför energi, bra

Svar: Farten i B blir

$$|v_B| = \sqrt{\left(v_A \frac{r_A}{r_B}\right)^2 + v_r^2}$$

och det uträttade arbetet blir

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_A^2 \left(\left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 - 1 \right) + \frac{1}{2} m v_r^2 \quad (\text{tillförd energi}).$$

Uppgift 3

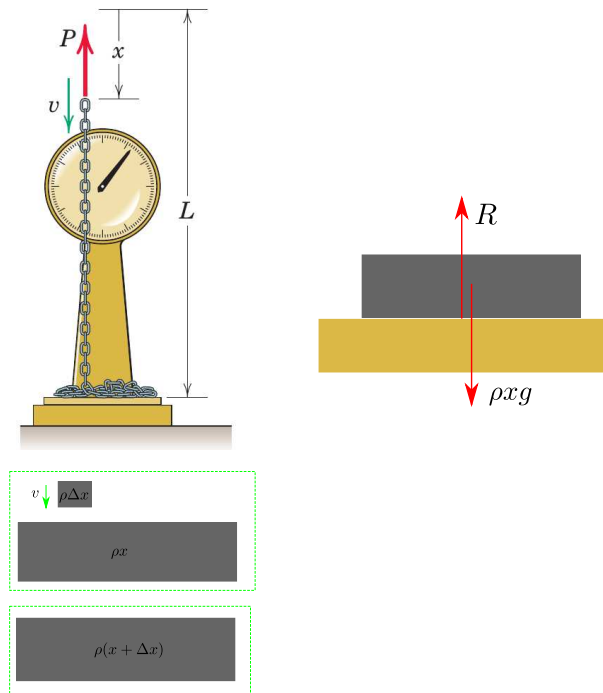


Figure 1.

Vi tittar på systemet bestående av kedjan som ligger på vågen tillsammans med en liten bit som är på väg ned. Rörelsemängden vid x och $x + \Delta x$ ges av (med positiv riktning uppåt)

$$\begin{aligned} G(x) &= -\rho\Delta xv \\ G(x + \Delta x) &= 0. \end{aligned}$$

De externa krafterna är dels tyngdkraften på kedjan som ligger på vågen och den sökta normalkraften R .

$$\begin{aligned} \sum F &= \frac{\Delta G}{\Delta t} \\ &\Leftrightarrow \\ -x\rho g + R &= \frac{\rho\Delta xv}{\Delta t} \\ &\Leftrightarrow \\ R &= \rho v^2 + x\rho g \end{aligned}$$