Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 16 augusti 2023 klockan 08.30-11.30 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 070-3744377, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, . . ., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

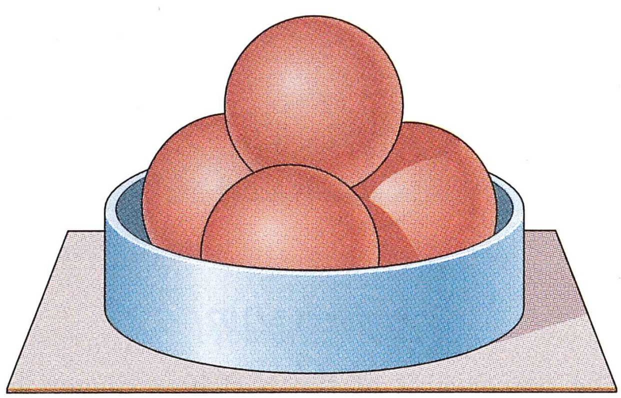
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Torsdagen 7 september kl 12.30-13.00 i FL61.

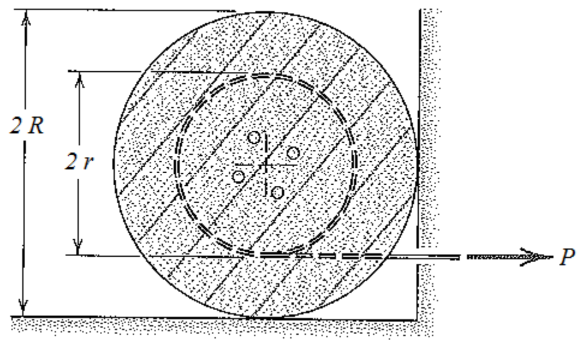
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

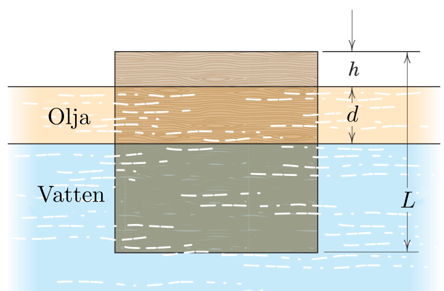
1. Tre identiska stålkulor, vardera med massan m, ligger i den cylindriska ringen som är placerad på ett horisontellt bord. Ringens radie är sådan så att kulorna precis rör vid varandra och ringen, och dess höjd är något större än kulornas radie. En fjärde likadan kula placeras ovanpå de tre kulorna. Bestäm storleken av den horisontella kraft varmed ringen påverkar var och en av de undre kulorna. *Ledning:* Rita figurer ovanifrån och från sidan.



2. Kabelrullen har massan m och den kinetiska friktionskoefficienten är μ_k i både den horisontella och vertikala kontaktytan. Hur stor skall kraften P vara för att rullen skall rotera med konstant vinkelhastighet?



3. Ovanpå vattnet (densitet ρ_{vatten}) ligger ett oljeskikt (densitet ρ_{olja}) med tjocklek d. En kub av trä (densitet $\rho_{\text{trä}}$) med sidlängden L flyter enligt figuren. Bestäm höjden h. (Det gäller att $\rho_{\text{trä}} < \rho_{olja} < \rho_{vatten}$.)



Lycka till!

Problem 1

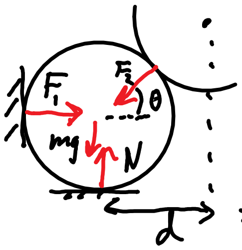
Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1, del 1

Givet: Tetraeder av kulor, massa m, (radie r)

Sökt: Horisontell kraft på vardera kula för stabilt system.

Lösning:

Betrakta en bottenkula.



Frilägg och ställ upp kraftekvationer,

$$F_x : F_1 - F_2 \cos\theta = 0$$

$$F_y : N - mg - F_2 \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = (N - mg)\cot\theta \qquad (1)$$

Symmetriskt, så detta gäller för varje bottenkula.
För systemet av alla 4 kulor gäller i y-led att

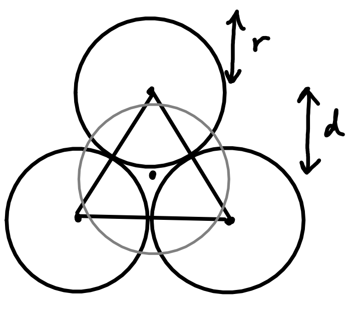
$$3N - 4mg = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{4}{3} mg .$$

Detta i (1) ger oss att

$$F_1 = \frac{1}{3} mg \cot\theta .$$

Återstår att bestämma θ, som ges av geometrin.



Sett uppifrån så blir det lättare att hitta d, som centrum av en liksidig triangel med sidan $2r$. "Höjden" i den liksida triangeln är $h = \sqrt{3}\, r$, och $d = \frac{2}{3} h = \frac{2}{\sqrt{3}} r$ (tyngdpunkten i triangel är $\frac{1}{3} h$)

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} r\right)^2}}{\frac{2}{\sqrt{3}} r} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

Så
$$F_1 = \frac{1}{3} mg \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} mg$$

Kontroller:
$$[F_1] = kg \cdot \frac{N}{kg} \text{ , ok!}$$

Större $\theta \Rightarrow$ Större $\tan\theta \Rightarrow$ mindre F_1, bra!

<u>Svar:</u> Kraften från ringen är $\frac{1}{3\sqrt{2}} mg$.

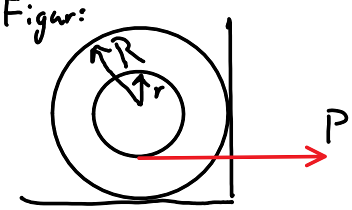
Problem 2

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Dimensioner r, R, massa m, dynamisk friktionkoefficient μ_k.

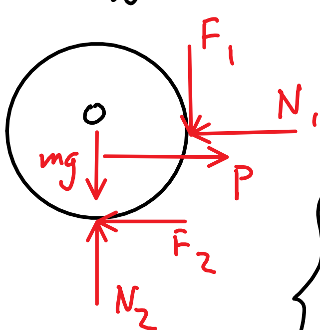
Sökt: Kraft P krävd för konstant vinkelhastighet.

Figur:



Lösning: Konstant vinkelhastighet innebär att det inte finns någon resulterande kraft eller moment.

Frilägg:



Där $F_1 = \mu_k N_1$ och $F_2 = \mu_k N_2$.

Jämviktsekvationer:

$$\begin{cases} \rightarrow: & P - N_1 - F_2 = 0 \\ \uparrow: & N_2 - F_1 - mg = 0 \\ \circlearrowleft O: & rP - RF_1 - RF_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{r \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} P = N_1 + \mu_k N_2 & (1) \\ P = \frac{R}{r}\mu_k (N_1 + N_2) & (2) \\ N_2 - \mu_k N_1 = mg & (3) \end{cases}$$

Likställande av H.L. ; (1) och (2) ger

$$N_1 = \mu_k N_2 \frac{\left(\frac{R}{r} - 1\right)}{\left(1 - \frac{R}{r}\mu_k\right)}. \qquad (4)$$

Insättning av (4) ; (3) ger

$$N_2 = mg \left[1 - \mu_k^2 \frac{R - r}{r - \mu_k R} \right]^{-1}, \qquad (5)$$

$$N_2 = mg\left[1-\mu_k^2\frac{R-r}{r-\mu_k R}\right], \qquad (5)$$

och (4) i (1) ger

$$P = \mu_k N_2\left(1+\frac{R-r}{r-\mu_k R}\right). \qquad (6)$$

Slutligen, insättning av (5) i (6) ger

$$P = mg\,\mu_k\,\frac{1+\frac{R-r}{r-\mu_k R}}{1-\mu_k^2\frac{R-r}{r-\mu_k R}} = mg\,\mu_k\,\frac{R(1-\mu_k)}{r(1+\mu_k^2)-R(\mu_k+\mu_k^2)}$$

Kontroller: $[P] = [mg]\frac{[R]}{[r+R]} = [mg] = N$, ok!

$N_2 \to mg$, $N_1 \to 0$ när $\mu_k \to 0$, bra!

$r = R\frac{(\mu+\mu^2)}{(1+\mu^2)}$ kritisk och inte omöjlig.

"Det spelar ingen roll hur stort P är, den kommer att stanna oavsett".

Med större friktion kommer då rullen vilja rulla åt andra hållet, och P alltså behöva vara negativt. Rimligt!

Obs! Börjar rullen rulla åt vänster i figur släpper den från väggen och antagandet om normalkraften brister.

På samma sätt med ett negativt P riskerar rullen att lyfta från marken.

Svar: För konstant vinkelhastighet ska kraften vara

$$P = mg\,\mu_k\,\frac{R(1-\mu_k)}{r(1+\mu_k^2)-R(\mu_k+\mu_k^2)}$$

Problem 3