Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Torsdagen den 16 mars 2023 klockan 08.30-11.30 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

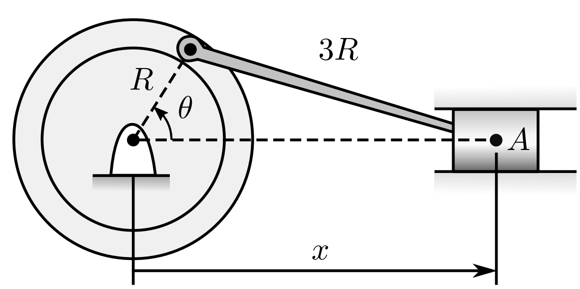
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Torsdagen 13 april kl 12.30-13.00 i FL61.

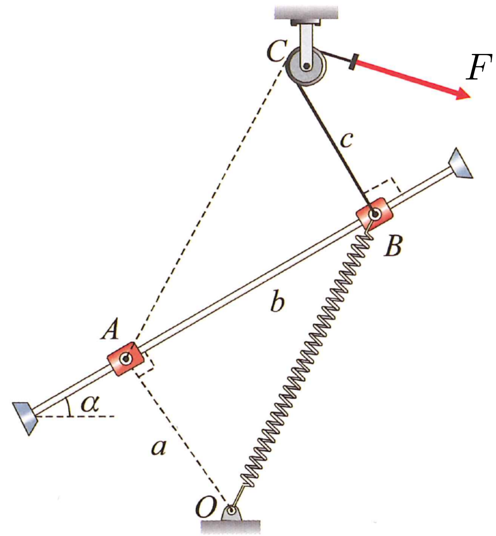
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

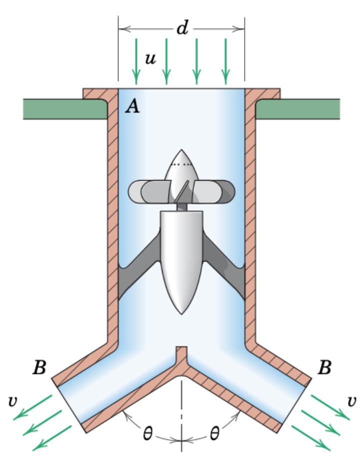
1. Med konstruktionen i figuren nedan kan en cirkulerande rörelse (hos cirkelskivan) överföras till en periodisk en-dimensionell rörelse (hos kolven). Härled ett uttryck för hastigheten $\dot{x}$ i termer av $\dot{\theta}$. Radien R är avståndet mellan centrum av cirkelskivan och fästpunkten för stången.



2. En hylsa med massan m kan glida friktionsfritt längs en stång som bildar lutningsvinkeln α med horisontalplanet. Hylsan är fäst i en masslös fjäder med fjäderkonstanten k och den ospända längden a. Andra änden av fjädern är fäst i den fixa punkten O enligt figuren. En lina är fäst i hylsan och löper genom en liten (friktionslös) trissa i punkten C. Hylsan är från början i vila i punkten A på avståndet a från O då man börjar dra i linan med en konstant kraft F enligt figuren. Bestäm hylsans fart v_B i punkten B på avståndet b från A längs stången och på avståndet c från trissan.

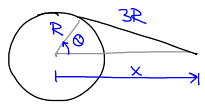


3. En fläktenhet med totala massan m hänger vertikalt och är fastsatt med omgivande konstruktion (grön) vid sin översta del, markerad med A i figuren. Fläkten drar in luft med densitet ρ och fart u genom den cirkulära öppningen med diameter d vid A och skickar sedan ut luften vid utloppen B med en hastighet v. Bestäm ett uttryck för den kraft R som fläktenheten påverkar omgivande konstruktion med i infästningen vid A. Fläktenheten är symmetrisk under spegling i en vertikal linje genom dess centrum. (Det är vanligt lufttryck både vid inloppet och utloppen så någon tryckskillnad behöver inte tas med.)



Lycka till!

1 **Givet**: Radien R, vinkeln Θ och vinkelhastigheten $\dot{\Theta}$



Sökt: Hastigheten $\dot{x}$

Lösning:

Från cosinussatsen har vi följande tvångsekvation

$$(3R)^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\Theta$$

Eftersom R är konstant får vi:

$$\frac{d}{dt}\left(R^2 + x^2 - 2Rx\cos\Theta\right) = \frac{d}{dt}\left((3R)^2\right) = 0$$

$$0 + 2x\cdot\dot{x} - 2R\frac{d}{dt}(x\cos\Theta) = 0$$

$$\cancel{2}x\dot{x} - \cancel{2}R\left(\dot{x}\cos\Theta - x\sin\Theta\;\dot{\Theta}\right) = 0$$

$$\dot{x}\;\left(x - R\cos\Theta\right) = -Rx\dot{\Theta}\sin\Theta$$

Svar: $\dot{x} = -\dfrac{Rx\dot{\Theta}\sin\Theta}{x - R\cos\Theta}$

Kontroller

$$[\dot{x}] = \frac{m \cdot m \cdot s^{-1}}{m} = m/s \quad \text{OK!}$$

$\dot{x}$ bör vara noll i vändpunkterna, d.v.s. då $\Theta = 0$ och $\Theta = \pi$

$\dot{x}(\Theta = 0) = 0 = \dot{x}(\Theta = \pi)$ OK!

$|\dot{x}|$ ökar med $|\dot{\Theta}|$ OK!

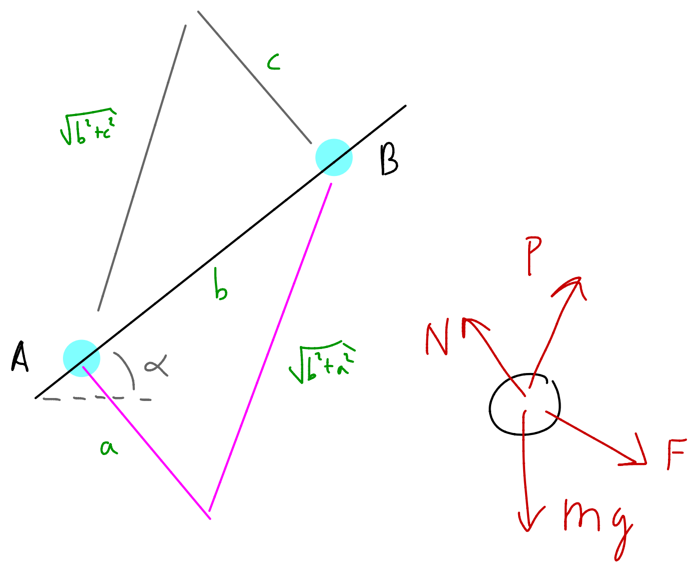
Antag $\dot{\Theta} > 0$:

$\dot{x}(\Theta = \pi + \varepsilon) = \dfrac{Rx\dot{\Theta}\sin\varepsilon}{x + R\cos\varepsilon} > 0$ för små $\varepsilon > 0$, alltså $\dot{x} > 0$ strax efter vänstra vändpunkten OK!

Sökt: Hylsans fart i punkten B.

Givet: Kraften P, längderna a,b,c, fjäderkonstanten k och vinkeln α.

Plan: Använda energiprincipen.



Fjäderkraften F och tyngdkraften är båda konservativa och bidrar till totala mekaniska energin.

$$E_A = 0$$

$$E_B = mg\sin(\alpha)b + \underbrace{\frac{1}{2}k\left(\sqrt{b^2+a^2}-a\right)^2}_{F} + \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{K_B}$$

Normalkraften verkar vinkelrätt mot rörelsen och ger därför inte uppehov till något arbete. Kraften P utför ett arbete

$$U_{A\text{-}B} = P\underbrace{\left(\sqrt{b^2+c^2}-c\right)}$$

Avståndet som angreppspunkten rör sig på andra sidan trissan.

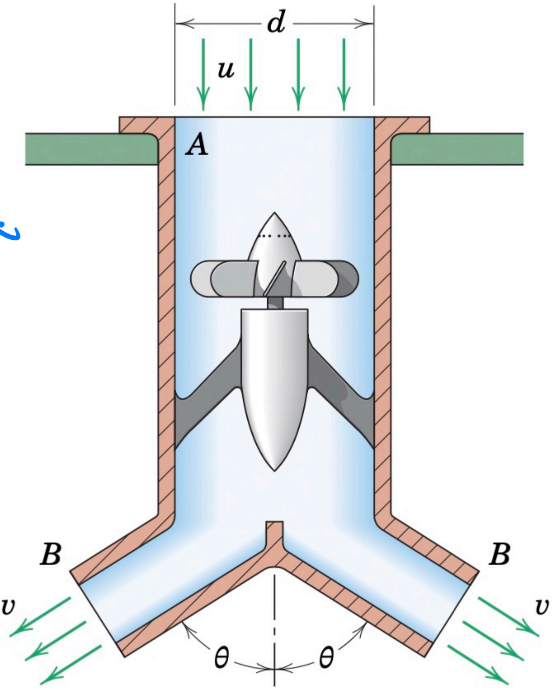
Energiprincipen ger

$$E_B = E_A + U_{A\text{-}B} \iff mg\sin(\alpha)b + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{b^2+a^2}-a\right)^2 + \frac{mv^2}{2} = P\left(\sqrt{b^2+c^2}-c\right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\underbrace{\frac{2P}{m}\left(\sqrt{b^2+c^2}-c\right)}_{①} - \underbrace{2g\sin(\alpha)b}_{②} - \underbrace{\frac{k}{m}\left(\sqrt{b^2+a^2}-a\right)^2}_{③}}$$

$$[①] = \frac{kg\,m}{s^2}\Big/kg \cdot m = \frac{m^2}{s^2} \qquad [②] = \frac{m}{s^2}\cdot m = \frac{m^2}{s^2} \qquad [③] = \frac{[kraft]}{m}\Big/kg \cdot m^2 = \frac{m^2}{s^2}$$

Uppgift 3



Sökt: Totala kraften R på omgivande konstruktion.

Givet: Inloppsfart u
Utloppsfart v

Inloppsarea $A = \frac{\pi d^2}{4}$

Utloppsvinkel θ

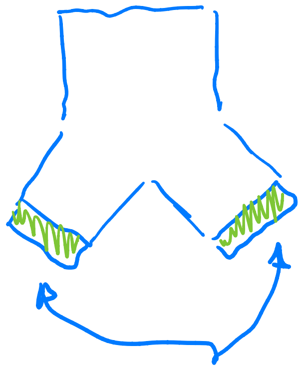
Plan: Detta är stationärt massflöde. Identifiera en delkropp vid t och $t + \Delta t$, och frilägg denna för att få med ev externa krafter.

Delkropp:

luft som kommer sugas in i fläkten under tiden Δt

t:

$t + \Delta t$:

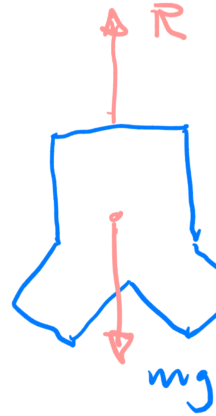


luft som trycks ut ur fläkten under tiden Δt

Massan för delkroppen är

$$\Delta m = \underbrace{A u}_{\text{volym/tidsenhet}} \underbrace{\rho}_{\text{massa/volym}} \Delta t$$

Friläggning



[Gravitationskraften på delkroppen av luft kan försummas då den är av högre ordning i Δ (en liten massa Δm påverkas under en liten tid Δt]

$$\underbrace{(R - mg)\Delta t}_{\text{tillförd impuls}} = \underbrace{-2\cdot\frac{\Delta m}{2}\, v\cos\theta}_{\text{slutlig rörelsemängd}} - \underbrace{(-\Delta m\, u)}_{\text{ursprunglig rörelsemängd}}$$

Sätter vi nu in uttrycket för Δm, och dividerar med Δt, fås

$$\boxed{R = mg + \underbrace{\underbrace{\frac{\pi d^2}{4}\rho u}_{\text{massa/tidsenhet}}\left(u - v\cos\theta\right)}_{\text{massa}\cdot\text{acceleration/ok}}}$$

Svar Fläktenheten påverkar omgivande konstruktion med kraften R ovan **nedåt**.