Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 17 augusti 2022 klockan 08.30-11.30 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Eric Nilsson, tel. 076-141 34 51, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

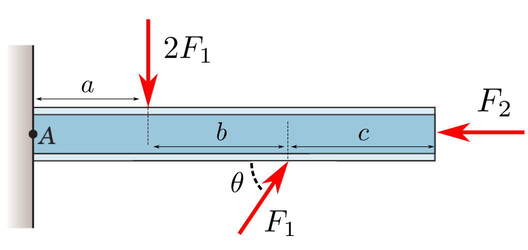
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredagen 9 september kl 12.30-13.00 i FL61.

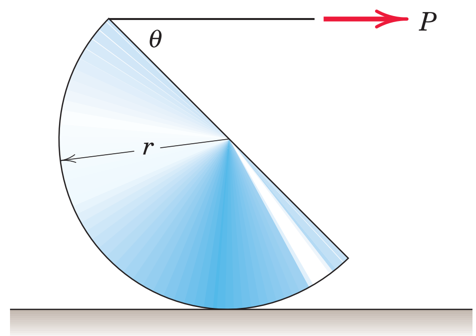
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

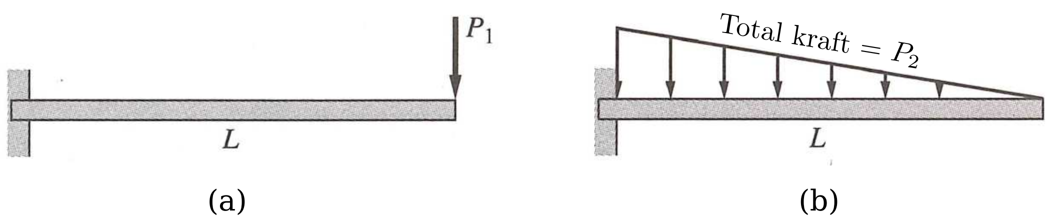
1. a) Ersätt kraftsystemet som verkar på den smala balken (dvs försumma dess höjd i figuren) med ett stelkroppsekvivalent system bestående av en kraft och ett vridmoment i punkten A.
b) Ersätt kraftsystemet som verkar på den smala balken med ett stelkroppsekvivalent system bestående endast av resultaten av de tre krafterna. Bestäm särskilt avståndet x till höger om punkten A där resultanten verkar.



2. Den homogena halvcylindern hålls på plats i det avbildade läget genom kraften P. Den statiska friktionskoefficienten mellan halvcylindern och underlaget är μ_s. Hur stor kan vinkeln θ vara utan att glidning sker?

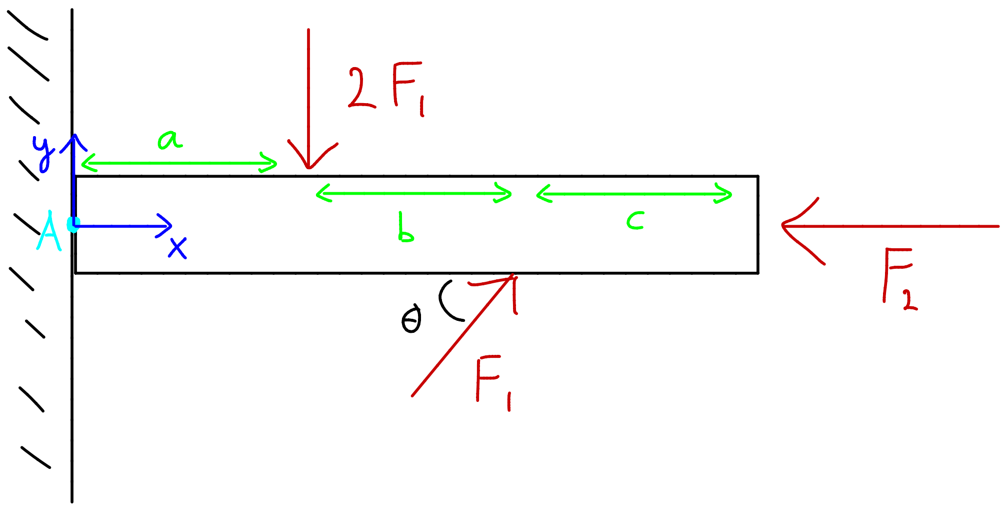


3. Om en (homogen och masslös) balk belastas enligt figur (a) så brister den för en viss kraft $P_1^{\max}$ eftersom böjmomentet blir för stort i någon punkt. Hur stor kan den totala kraften P_2 högst vara innan balken brister av samma anledning då den belastas enligt figur (b)?



Lycka till!

Statik U1



$$\vec{R} = \left(F_1\cos(\theta) - F_2\right)\hat{x} + \left(F_1\sin(\theta) - 2F_1\right)\hat{y}$$
$$= \left(F_1\cos(\theta) - F_2\right)\hat{x} + F_1\left(\sin(\theta) - 2\right)\hat{y}$$

$$M_A = -2F_1 a + F_1 \sin(\theta)(a+b) = F_1\left(\sin(\theta)(a+b) - 2a\right)$$

Var skär verkningslinjen för resultanten balken?

Låt $\vec{p} = x\hat{x}$, vi söker x s.a. $\vec{p} \times \vec{R} = M_A \hat{z}$

$$\vec{p} \times \vec{R} = (x\hat{x}) \times \left(R_x\hat{x} + R_y\hat{y}\right) = xR_y\hat{z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{M_A}{R_y} = \frac{-2a + \sin(\theta)(a+b)}{\sin(\theta) - 2}$$

Problem 2

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: massa m, radie r, kraft P, friktionskoefficient μ_s

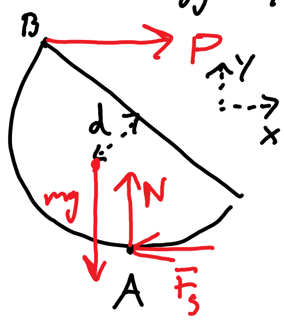
Sökt: Maximal vinkel θ för jämvikt.

Figur:

Plan: Jämvikt: Frilägg och ställ upp jämviktsekvationer

Obs. Hitta masscentrum och friktion.

Lösning: Frilägg cylindern



Jämviktsekvationer:

$$F_x: \quad P - F_s = 0 \quad \Rightarrow P = F_s \qquad (1)$$

$$F_y: \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow N = mg \qquad (2)$$

$$M_A: \quad \vec{r}_B \times \vec{P} + \vec{r}_{cm} \times (-mg\,\hat{y}) = 0$$

$$\Rightarrow \left(r\hat{y} + r(-\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})\right) \times P\hat{x} +$$

$$\left(r\hat{y} + d(-\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})\right) \times (-mg\,\hat{y}) = 0$$

$$\Rightarrow -r(1+\sin\theta)P\,\hat{z} + d\sin\theta\, mg\,\hat{z} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{rP}{dmg - rP} \overset{(1)}{=} \frac{rF_s}{dmg - rF_s}$$

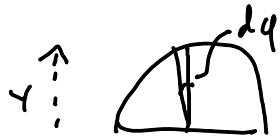
I det kritiska läget gäller att

$$F_s = \mu N \overset{(2)}{=} \mu mg$$

vilket ger

$$\sin\theta = \frac{r\mu_s}{d - r\mu_s} \qquad (1)$$

Nu vill vi bestämma tyngdpunkten hos cylindern:



Dela upp den i skivor enligt figur med tvärsnittsarea $\frac{1}{2} r\, r\, d\varphi$ och tyngdpunkt (som triangel) vid $\frac{2}{3} r \sin\varphi$

Då har vi alltså att

$$md = \int y\, dm = \int_0^\pi \underbrace{\frac{2}{3} r \sin\varphi}_{y}\ \underbrace{\rho_A \frac{1}{2} r^2 d\varphi}_{dm} = \frac{r^3}{3}\rho_A \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3} r^3 \rho_A$$

där vi introducerat areadensiteten $\rho_A = \frac{m}{\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)}$ och alltså

$$d = \frac{4}{3\pi} r$$

Detta insatt i (1) ger

$$\sin\theta = \frac{\mu_s}{\frac{4}{3\pi} - \mu_s} = \frac{3\pi\mu_s}{4 - 3\pi\mu_s}$$

<u>Kontroller</u>: $[\sin\theta] = 1$, allt enhetslöst, bra.

Växer med μ_s, bra.

Från 0 när $\mu_s = 0$ till 1 när $\mu_s = \frac{2}{3\pi}$.

Om $\mu_s > \frac{2}{3\pi}$ då? Då nås helt enkelt inte det kritiska fallet $F_s = \mu_s N$ innan cylindern välter!

$0 < \theta < \pi/2 \Rightarrow \theta = \sin^{-1}[\sin\theta]$

<u>Svar</u>: Den maximala vinkeln är

$$\theta_{max} = \sin^{-1}\left(\frac{3\pi\mu_s}{4 - 3\pi\mu_s}\right)$$

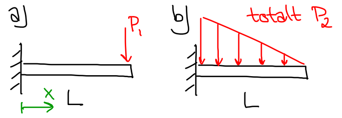
för $0 \le \mu_s < \frac{2}{3\pi}$ och

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$$

för $\mu_s \ge \frac{2}{3\pi}$ (då glider den inte före att den välter).

3. <u>Givet</u>: Längden L, kraften P_1^{max} vid bristning i a)
samt kraftfördelningen i b)

<u>Sökt</u>: Maximala totala kraften P_2^{max} innan bristning i b)

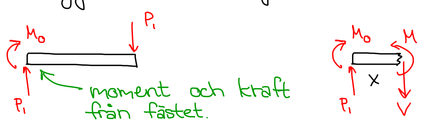


identiska homogena balkar

<u>Lösning</u>:

Inför koordinatsystem enligt figur a).

Frilägg balken i figur a) och bestäm böjmomentet M i positionen x.



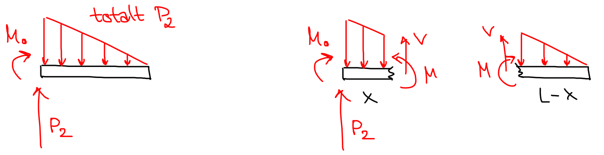
Från den högra biten fås, genom momentjämvikt, att

$M(x) = P_1(L-x)$

Det maximala böjmomentet fås vid $x=0$ (vilket man annars enkelt kan argumentera för direkt) och vid bristning fås då böjmomentet

$M_{brist} = P_1^{max} L$

Vi frilägger nu balken i figur b) och bestämmer böjmomentet M i pos. x



Kraftfördelningen w är linjärt avtagande samt noll i $x=L$ och har då formen

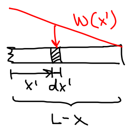
$w(x) = k(L-x)$

där k bestäms av att den totala kraften är P_2:

$P_2 = \int_0^L w(x)dx = \frac{1}{2} L \cdot kL$ (area av triangel med bas L och höjd kL)

$\Rightarrow k = \frac{2P_2}{L^2} \qquad w(x) = \frac{2P_2}{L^2}(L-x)$

Vi vill nu beräkna böjmomentet genom att titta på den högra biten. Momentet från kraftfördelningen fås genom att integrera bidragen från små bitar enligt figuren nedan.



$$M(x) = \int_0^{L-x} x' \cdot w(x')\,dx' = \frac{2P_2}{L^2}\int_0^{L-x} x'(L-x')\,dx' = \left\{\text{Partiell integr.}\right\}$$

$$= \frac{\cancel{2}P_2}{L^2}\left(\left[\frac{1}{\cancel{2}}x'^2(L-x')\right]_0^{L-x} - \int_0^{L-x} -\frac{1}{\cancel{2}}x'^2\,dx\right) = \frac{P_2}{L^2}\left((L-x)^2\cdot x + \int_0^{L-x} x'^2\,dx\right)$$

$$= \frac{P_2}{L^2}\left((L-x)^2 x + \frac{1}{3}(L-x)^3\right) = \frac{P_2}{3L^2}(L-x)^2(3x+L-x) = \frac{P_2}{3L^2}(L-x)^2(L+2x)$$

Eftersom $\frac{d}{dx}M(x) \overset{*}{=} x\,w(x)\frac{d}{dx}(L-x) = -x\,w(x) < 0$ för $0<x<L$ (* analysens huvudsats)

så är böjmomentet som störst för $x=0$ (vilket man också kan argumentera direkt för)

Vi får då vid bristning att

$$P_1^{max} L = M_{brist} = M(x=0) = \frac{P_2}{3L^2}L^2\cdot L = \frac{1}{3}P_2\cdot L \Rightarrow P_2 = 3P_1^{max}$$

<u>Svar</u>: $P_2^{max} = 3P_1^{max}$

<u>Kontroller</u>: Dim. OK! $\qquad P_2^{max} > P_1^{max}$ OK!