Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Tisdagen den 16 augusti 2022 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

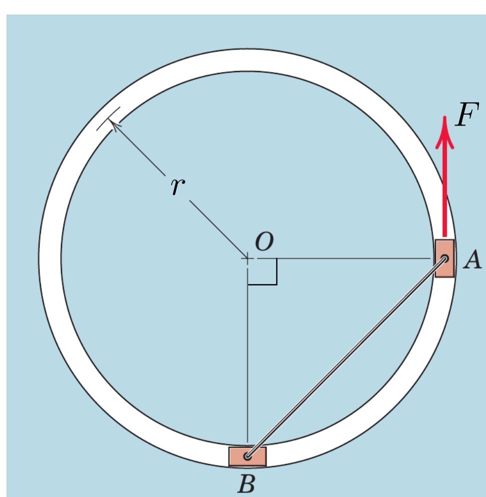
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Torsdagen 8 september kl 12.30-13.00 i FL61.

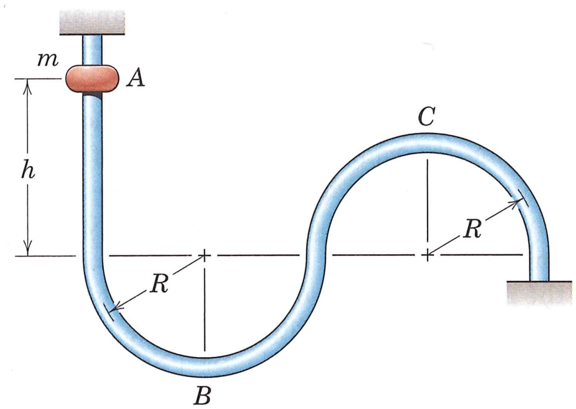
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

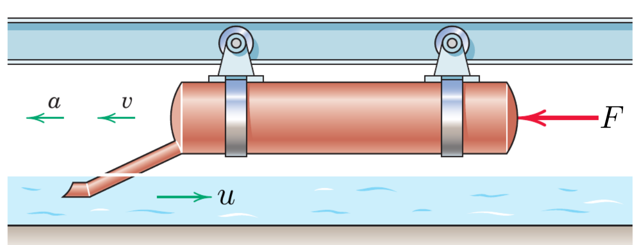
1. Två vagnar, A och B, med samma massa m rör sig friktionslöst längs ett cirkulärt spår, med radien r, i ett horisontellt plan. Bestäm accelerationen för varje vagn, och normalkraften från spåret på varje vagn, just efter start då systemet startar från vila i angiven position och kraften F verkar tangentiellt mot det cirkulära spåret på vagn A. Bestäm även spännkraften i (den otöjbara och masslösa) tråden som binder samman vagnarna.



2. En ring släpps i vila i läget A och glider sedan friktionsfritt längs en bjöd stång. Hela systemet befinner sig i ett vertikalt plan enligt figuren nedan. Bestäm höjden h så att ringen inte påverkar stången med någon normalkraft då den passerar läge C.



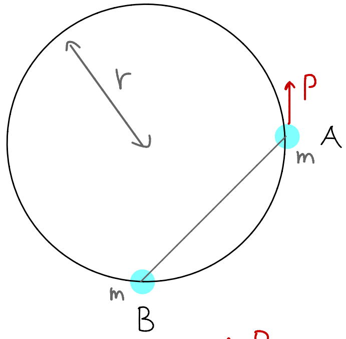
3. En behållare glider fritt på en skena över en ström av vatten med densitet ρ. Vattnet rör sig åt höger med en fart u. Behållaren tar in vatten genom ett rör med öppningsarean A och inströmningsfarten antas vara samma som den relativa hastigheten mellan röret och vattnet. Kraften F skjuter behållaren åt vänster. Beräkna den kraft F som behövs för en given tidpunkt där den totala massan för behållaren och det uppsamlade vattnet är M och där behållarens fart v och acceleration a är givna. Antag att när vattnet kommer in i behållaren så får det samma hastighet som behållaren.



Lycka till!

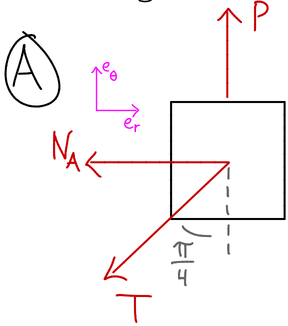
1

Sökt: Vagnarnas acceleration, normalkrafter och spännkraften i linan.
Givet: Kraften P, massan m och radien r.



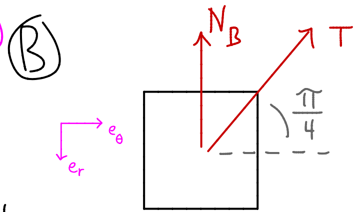
Plan: Frilägga vagnarna separat och skriva ner deras rörelseekvationer i polära koordinater. Linan ger uppehov till ett tvång som kan uttryckas som att vinkeln mellan vagnarna är konstant.

$$\theta_A = \theta_B + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_A = \dot{\theta}_B \equiv \dot{\theta} \\ \ddot{\theta}_A = \ddot{\theta}_B \equiv \ddot{\theta} \end{cases}$$



$$A: \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} -T\cos(\frac{\pi}{4}) + P = mr\ddot{\theta} \; (= ma_\theta) & ① \\ -N_A - T\sin(\frac{\pi}{4}) = -mr\dot{\theta}^2 \; (= ma_r) & ② \end{cases}$$

$$B: \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} N_B + T\sin(\frac{\pi}{4}) = -mr\dot{\theta}^2 \; (= ma_r) & ③ \\ T\cos(\frac{\pi}{4}) = mr\ddot{\theta} \; (= ma_\theta) & ④ \end{cases}$$



$$④ - ① \Leftrightarrow 2T\cos(\tfrac{\pi}{4}) - P = 0 \Leftrightarrow T = \frac{1}{\sqrt{2}}P$$

$$② - ③ \Rightarrow N_A = N_B \equiv N$$

I det angivna läget är vagnarna i vila så att $\dot{\theta} = 0$.

$$① \Rightarrow \quad N = mr\dot{\theta}^2 - T\sin(\tfrac{\pi}{4}) \underset{\substack{\dot{\theta}=0 \\ \text{vid start}}}{=} -\frac{1}{2}P$$

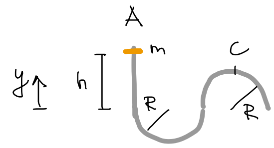
$$③ \Rightarrow \quad a_r = 0$$

$$④ \Rightarrow \quad a_\theta = r\ddot{\theta} = \frac{1}{2m}P$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2m}P\,e_\theta$$

$$[a_\theta] = \frac{kg\,m}{s^2}/kg = \frac{m}{s^2}$$

2 Givet: Radien R, massan m och att ringen glider friktionsfritt.



Sökt: Höjden h så att ringen inte påverkar stången med någon normalkraft i C.

Lösning:

Använd energiprincipen för ringen.

Normalkraften från stången är alltid vinkelrät mot färdriktningen och uträttar därför inget arbete $(\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0)$

Då vi inte har någon friktion återstår då endast tyngdkraften vilken är konservativ och kan därför beskrivas med en potential.

Ringens potentiella energi i A och C:

$V_A = mgh \quad V_C = mgR$

Ringens kinetiska energi i A och C:

$T_A = 0$ ty i vila $\quad T_C = \frac{1}{2} m v_C^2$ där vi har infört ringens fart v_C i C.

Energiprincipen ger:

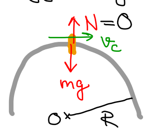
$E_{efter} = E_{före} + U_{infört}$

$T_C + V_C = T_A + V_A + 0$

$\frac{1}{2} m v_C^2 + mgR = mgh \quad \Rightarrow \quad h = R + \frac{v_C^2}{2g} \quad (*)$

v_C fås från kravet att normalkraften är noll i C.

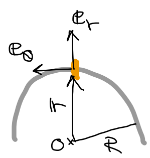
Frilägg ringen i C:



Då ringen i detta skede gör en centralrörelse inför vi polära koordinater i O.

Accelerationen i polära koordinater ges av

$\mathbf{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r} \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta$



För C gäller: $r = R, \quad \dot{r} = 0 = \ddot{r} \quad \Rightarrow \quad a_r = -R\dot{\theta}^2 = -\frac{v_C^2}{R}$ ty $v_C = -R\dot{\theta}$

Newton II i r-led ger att

$m a_r = N - mg = -mg \quad \Rightarrow \quad \frac{v_C^2}{R} = g \quad \Rightarrow \quad \frac{v_C^2}{g} = R$

Detta insättes i $(*)$

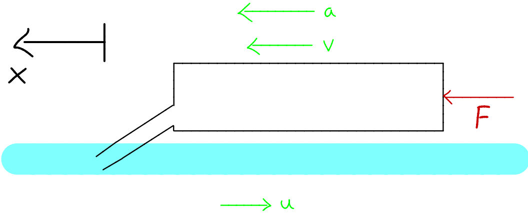
Svar: $h = R + \frac{1}{2} R = \frac{3}{2} R$

$[h] = [R] = \mathrm{m}$ OK!

3

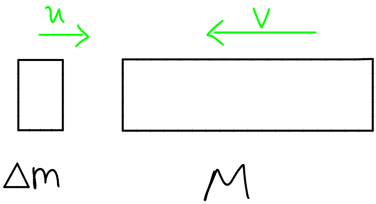
Sökt: Kraften F.

Givet: Farterna u, v, accelerationen a, densiteten ρ, arean A och massan M.



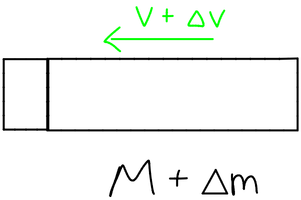
Plan: Analysera massflödet genom att betrakta systemet vid t och $t+\Delta t$.

$\underline{t}$



$$(\leftarrow) \quad G_t = Mv - \Delta m\, u$$

$\underline{t+\Delta t}$



$$(\leftarrow) \quad G_{t+\Delta t} = (M+\Delta m)(V+\Delta V)$$

$$F\,\Delta t = G_{t+\Delta t} - G_t = M\,\Delta v + V\,\Delta m + u\,\Delta m + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$\Delta m = (v+u)\cdot A \cdot \rho\,\Delta t$$

$$\Delta v = a\,\Delta t$$

$$\Rightarrow F = \underbrace{Ma}_{1} + \underbrace{(v+u)^2 A\rho}_{2}$$

$$[1] = kg\frac{m}{s^2}$$

$$[2] = \frac{m^2}{s^2}\cdot m^2 \cdot \frac{kg}{m^3} = \frac{kg\,m}{s^2}$$