Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Torsdagen den 17 mars 2022 klockan 08.30-11.30 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, . . ., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

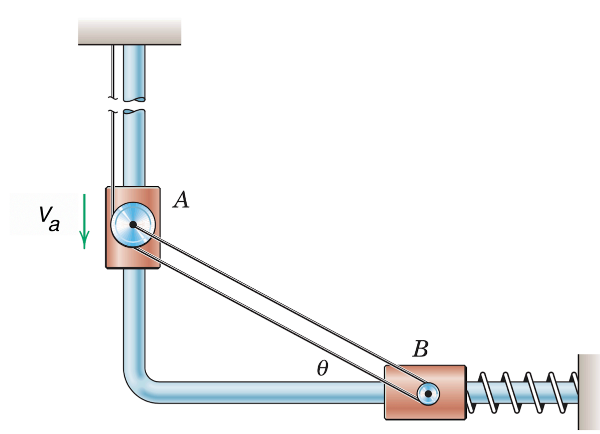
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Tentamensvisning: Onsdagen 20 april kl 12.30-13.00 i FL61.

Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

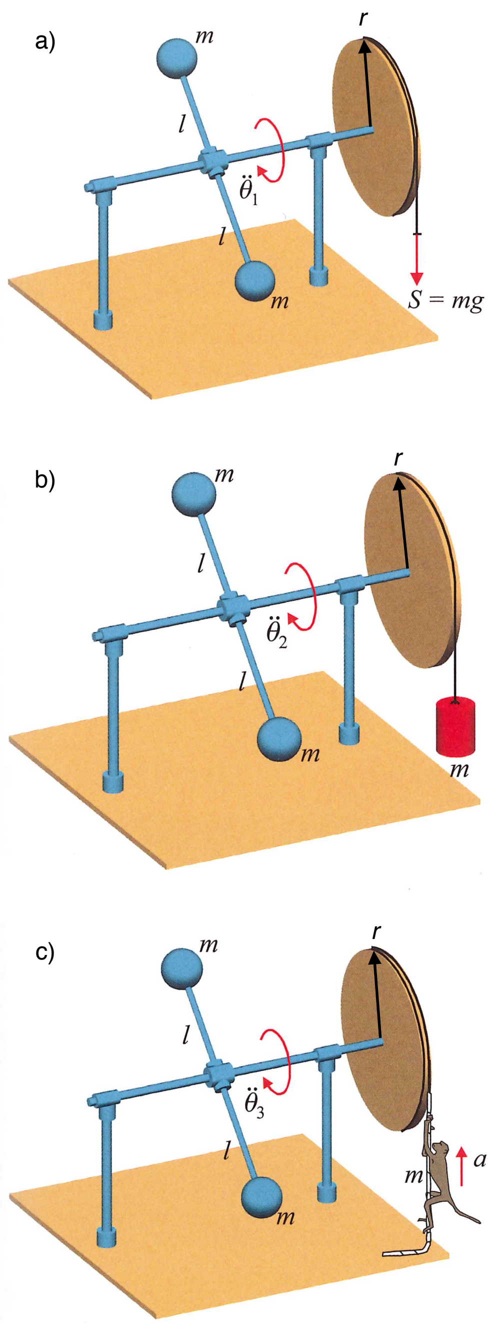
1. Cylindern A har en konstant hastighet v_a nedåt. Beräkna hastigheten hos cylinder B då vinkeln $\theta = 30°$. Försumma radien hos trissorna. OBS: Kabelns längd är konstant och fjäderns enda funktion i uppställningen är att se till att kabeln hela tiden är sträckt. Med andra ord kan man utgå från att kabeln är sträckt och då bortse från fjädern. Notera även att en bit av kabeln och stången inte ritas ut, illusterat av "glappet" ovanför cylinder A. För att undvika missförstånd: från cylinder A sträcker sig både kabeln och stången ända upp till den horisonella ytan i figuren där de är fästa.



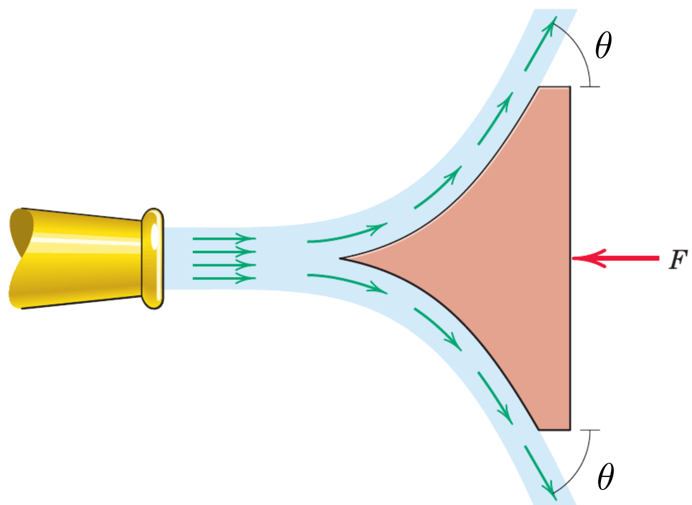
2. Betrakta anordningen i figuren bestående av en masslös stång som kan rotera friktionsfritt kring en horisontell axel. En annan stång, också den masslös, är monterad vinkelrät mot den första och uppbär två likadana klot som är små (dvs kan behandlas som punktformiga), vardera med massan m enligt figuren. En masslös vajer är lindad kring en masslös trumma med radien r som är fäst i den horisontella stången.

   Betrakta tre olika fall enligt figurerna:
   a) Man drar i vajern med en dragkraft $S = mg$.
   b) En vikt med massan m är fäst i vajern.
   c) En apa med massan m klättrar uppför vajern med accelerationen a relativt marken.

   Bestäm anordningens vinkelacceleration $\ddot{\theta}$ i de tre olika fallen om avståndet från rotationsaxeln till varje klots mittpunkt är l.



3. Vatten med densiteten ρ sprutar ut från en slang med hastigheten v (m/s) och med ett flöde c (m^3/s). Strålen delas i två delar av ett hinder, enligt figuren, varvid båda av vattenflödets två delar ändrar riktning med vinkeln θ. Beräkna kraften F som krävs för att hindret inte ska röra sig. Observera att vattenflödet sker i ett horisontellt plan, dvs vattnet rör sig inte i höjdled.



Lycka till!

180315 - Problem 1

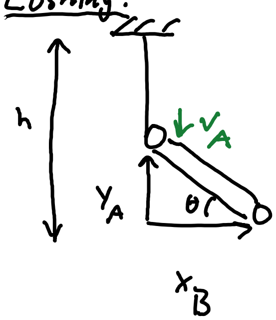
Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: hastighet v_A, vinkel θ

Sökt: hastigheten (v_B) hos B.

Plan: Konstant kabellängd -> villkor att derivera!

Lösning:



Vi inför höjden till fästningen h, samt lägena y_A och x_B enligt figur.
Kabelns totala längd, L, ges då av geometrin som

$$L = (h - y_a) + 2\sqrt{y_A^2 + x_B^2}.$$

Vi deriverar detta m.a.p. tiden (Obs $\dot{L} = \dot{h} = 0$)

$$0 = -\dot{y}_a + \frac{2}{\sqrt{y_A^2 + x_B^2}}\left(y_A \dot{y}_A + x_B \dot{x}_B\right) \qquad (1)$$

Observera att v_A definierat nedåt i uppgiften, d.v.s. $\dot{y}_A = -v_A$

Vi har också trigonometriskt att

$$y_A = x_B \tan\theta.$$

Sätter vi in dessa i (1) har vi

$$0 = v_A + \frac{2}{\sqrt{x_B^2 \tan^2\theta + x_B^2}}\left(-x_B \tan\theta\, v_A + x_B v_B\right)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} v_B = \tan\theta\, v_A - \frac{\sqrt{x_B^2 \tan^2\theta + x_B^2}}{2 x_B} v_A$$

$$= v_A\left(\tan\theta - \frac{\sqrt{\tan^2\theta + 1}}{2}\right)$$

(*) Där vi använt att $x_B > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ← tangens dålig då!

Kontroller: Dimensionsanalys: $[v_B] = m/s \cdot 1$ ok!

Rimligt? Ökar med v_A, bra

Inte noll för $\theta = 0$, för linan "dras in"!

Det finns en "vändpunkt" då $v_B = 0$, rimligt.

Snabbare desto större θ, rimligt.

Vi sätter in $\theta = 30^\circ$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$v_B = v_A\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{\frac{1}{3}+1}}{2}\right) = v_A\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{2}\right) = v_A\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \,!$$

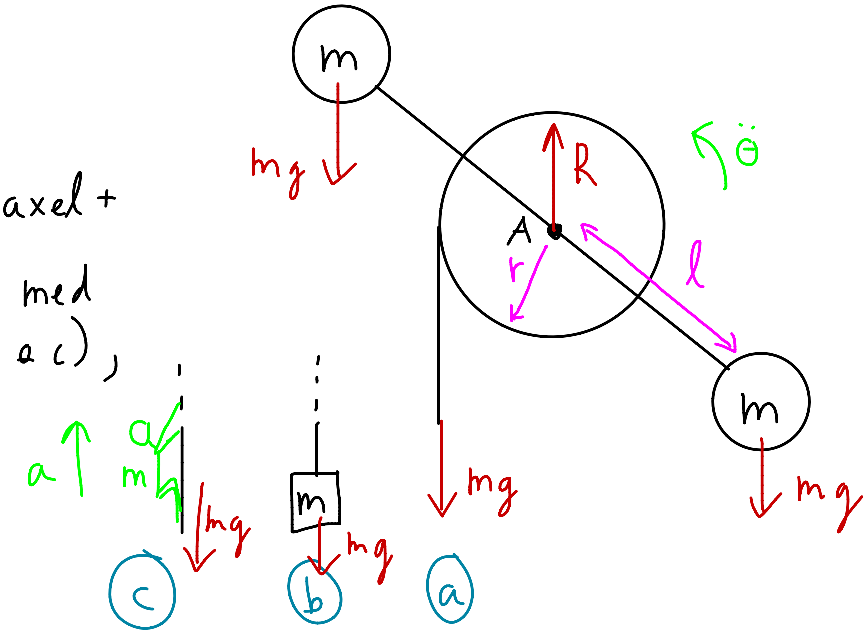
$\theta = 30^\circ$ är alltså exakt vändpunkten vi nämnde ovan.

<u>Svar:</u> När vinkeln $\theta = 30^\circ$ så är hastigheten hos cylinder B

$v_B = 0$.

Uppgift 2

Frilägghing av systemet axel + kulor + trumma (tillsammans med tyngd och apa i fall b & c), sett från trummans sida:



Observera att kulornas tyngdkrafter ger upphov till lika stora men motriktade vridmoment kring axeln.

(a):

Systemets totala rörelsemängdsmoment kring axeln A ges av

$$H_A = \overset{\text{2 kulor}}{2}\, m \underbrace{\ell}_{\text{hävarm}} \cdot \overbrace{(\ell\dot\theta)}^{\text{hastighet}} \quad \Rightarrow \quad \dot H_A = 2m\ell^2\ddot\theta \,,$$

och det totala vridmomentet kring A: $M_A = mgr$

$$\circlearrowleft A: \quad \dot H_A = M_A \iff 2m\ell^2\ddot\theta = mgr$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot\theta = \frac{gr}{2\ell^2}}$$

(b):

$$H_A = 2m\ell^2\dot\theta + \underbrace{mr^2\dot\theta}_{\text{tyngdens bidrag}} \Rightarrow \dot H_A = m\ddot\theta(2\ell^2 + r^2)$$

$$M_A = mgr$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\theta = \frac{gr}{2\ell^2 + r^2}}$$

c):

$$H_A = -mvr + 2ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{H}_A = -mar + 2ml^2\ddot{\theta}$$

$$M_A = mgr$$

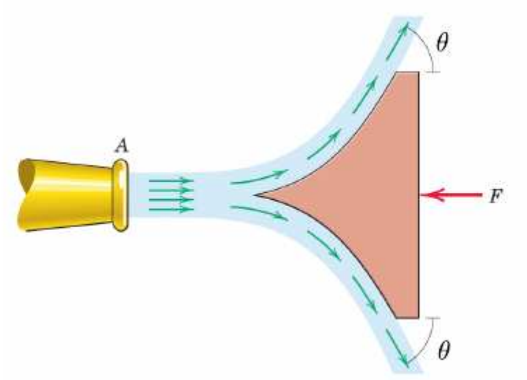
$$\dot{H}_A = M_A \Leftrightarrow -mar + 2ml^2\ddot{\theta} = mgr$$

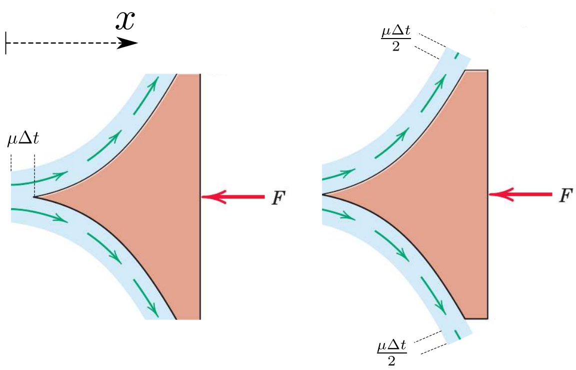
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{(g+a)r}{2l^2}}$$

I alla tre svar ges dimensionsanalysen av

$$[\ddot{\theta}] = \frac{\frac{m}{s^2}\cdot m}{m^2} = \frac{1}{s^2}$$

3. Vatten med densiteten ρ sprutar ut från en slang med hastigheten v (m/s) och med ett flöde c (m^3/s). Strålen delas i två delar av ett hinder, enligt figuren, varvid båda av vattenflödets två delar ändrar riktning med vinkeln θ. Beräkna kraften F som krävs för att hindret inte ska röra sig. Observera att vattenflödet sker i ett horisontellt plan, dvs vattnet rör sig inte i höjdled.





I den vänstra figuren visas en bit av flödet vid tiden t och sedan lite senare vid tiden $t + \Delta t$ till höger.

Totala massflödet vatten ges av $\mu = c\rho$. Frilägg hindret och vattnet på hindret tillsammans med en liten bit vatten som är på väg in från vänster under tiden Δt. Massan hos den lilla vattenbiten ges av massflödet gånger tiden, dvs $\mu\Delta t = c\rho\Delta t$.

Förändringen i rörelsemängd under tiden Δt ges av skillnaden av rörelsemängden för den lilla biten på väg in vid t och de två små bitarna på väg ut vid $t + \Delta t$, resten av vattenflödet har samma rörelsemängd vid båda tidpunkterna eftersom det är ett stationärt flöde. Eftersom vi är intresserade av kraften som är horisontell så tittar vi bara på skillnaden i x- komponenten för rörelsemängden.

$$\begin{aligned} G_x(t) &= (c\rho\Delta t)v \\ G_x(t+\Delta t) &= 2\left(\frac{c\rho\Delta t}{2}\right) v\cos(\theta) \end{aligned}$$

Den enda externa kraften är F så den totala impulsen är $F\Delta t$ vilket är lika med förändringen av rörelsemängden:

$$\begin{aligned} -F &= \frac{\Delta G_x}{\Delta t} = (\cos(\theta) - 1)vc\rho \\ &\Leftrightarrow \\ F &= (1 - \cos(\theta))vc\rho \end{aligned}$$

$$\left([F] = \frac{m}{s}\frac{m^3}{s}\frac{kg}{m^3} = \frac{kgm}{s^2}\right)$$