Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Tisdagen den 4 januari 2022 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

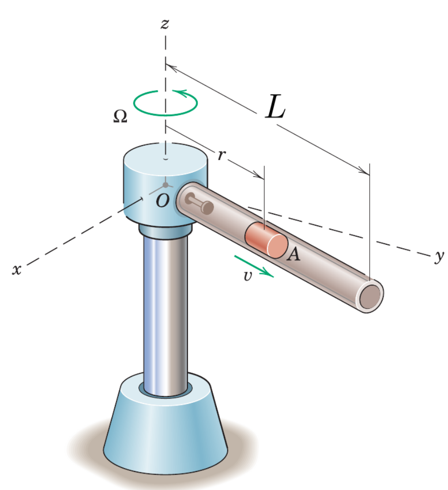
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Onsdagen 26 januari kl 12.30-13.00 i FL61.

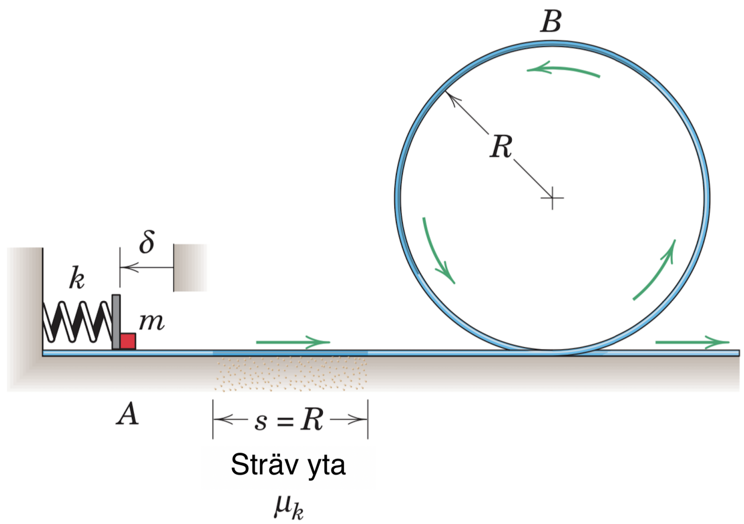
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

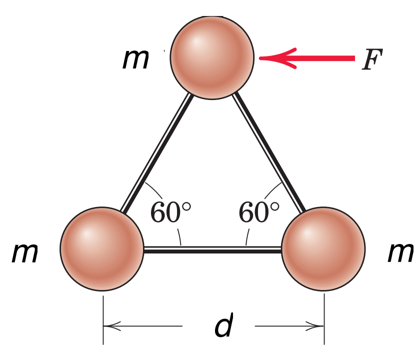
1. Det ihåliga röret med längden L roterar runt en vertikal axel genom O med en konstant vinkelhastiget $\dot{\theta} = \Omega$. En cylinder med massa m glider friktionsfritt inuti röret. Cylindern börjar på ett avstånd r_0 och har då farten v_0 längs röret. Beräkna storleken av den horisontella kraften P som verkar på cylindern precis när den lämnar röret. Svara i termer av L, v_0, m, Ω och r_0.



2. En fjäder med fjäderkonstanten k trycks ihop en sträcka δ från sin fria längd. Då fjädern släpps kommer den att trycka på partikeln med massan m, som då kommer att börja glida längs banan. Bestäm minsta möjliga δ så att partikeln inte kommer att tappa kontakten med banan då partikeln passerar genom loopen. Banan är friktionsfri förutom på en sträcka s av längden R där den kinetiska friktionen är μ_k.



3. Tre identiska sfärer, vardera med massan m, är stelt ihopsatta med tre stavar, vilkas massa kan försummas. Systemet ligger på ett bord enligt figuren (dvs alla klot ligger på bordet och befinner sig i samma horisontella plan) och friktionen mellan sfärerna och bordet kan försummas. Sfärerna är i vila då en kraft F appliceras på den översta sfären enligt figuren. Beräkna accelerationen $\bar{a}$ hos sfärernas masscentrum, vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ runt masscentrum och accelerationen a hos den översta sfären *just efter* kraften börjat verka på systemet (dvs då sfärerna ännu inte hunnit flytta sig jämfört med positionerna i figuren).



Lycka till!

Problem 1

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

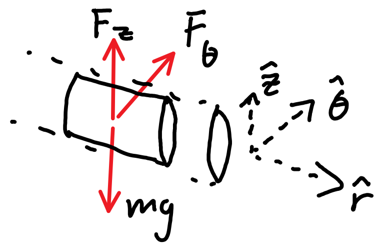
Givet: L, Ω, r_0, v_0, m

Sökt: kraften P från sidan när cylindern lämnar röret

Plan: Kraftekvationer.

Lösning:

Figur (friläggning):



Friläggning av cylindern i r- och θ-led:

$$0 = ma_r$$
$$F_\theta = ma_\theta$$

Komponenterna av accelerationen i polära koordinater ges av

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$= \ddot{r} - r\Omega^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$= 2\dot{r}\Omega$$

Insatt i de första ekvationerna får man

$$0 = -ma_r = m(r\omega^2 - \ddot{r}) \Rightarrow \ddot{r} = r\omega^2, \qquad (1)$$
$$F_\theta = 2m\dot{r}\Omega. \qquad (2)$$

Den första av dessa ger implicit $\dot{r}(r)$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{r}^2)}{dr}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d(\dot{r}^2)}{dr} = r\Omega^2$$

Integrera m.a.p. r,

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + C.$$

Vi vet att $\dot{r}(r_0) = v_0$ och därmed

$$C = \frac{1}{2}\left(v_0^2 - r_0^2\Omega^2\right),$$

vilket ger

$$\dot{r} = \sqrt{v_0^2 + \Omega^2(r^2 - r_0^2)}\ .$$

Detta insatt i (2) ger

$$F_\theta = 2m\sqrt{v_0^2 + \Omega^2(r^2 - r_0^2)}\ \Omega$$

När cylindern lämnar röret är $r = L$,

$$P = F_\theta(L) = 2m\sqrt{v_0^2 + \Omega^2(L^2 - r_0^2)}\ \Omega$$

<u>Kontroller</u>: $[P] = \text{kg}\ \text{m/s}\ \text{s}^{-1} = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$, ok!

Växer med ökande v_0, Ω, L, bra!

<u>Svar</u>: Storleken på den horisontella kraften kommer att vara

$$|P| = 2m\sqrt{v_0^2 + \Omega^2(L^2 - r_0^2)}\ |\Omega|$$

Problem 2

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Fjäderkonstant k, friktionskoeff. μ_k, massa m, sträckor R.

Sökt: Kompression δ så att partikeln inte tappar kontakten med banan.

Plan: Betrakta partikelns energi under förloppet.

Lösning: Att den tappar kontakten innebär att normalkraften är noll. Detta sker (om någonstans) i toppen där hastigheten (och därmed centripetalaccelerationen) är som lägst och tyngdkraften pekar i centripetalaccelerationens riktning.

Vi studerar energin under förloppet:

1) När fjädern är ihoptryckt och partikeln är i vila är

$$E_p + E_k = \frac{1}{2}k\delta^2 + 0$$

2) När partikeln lämnar fjädern har inga andra krafter än fjädern utfört något arbete, så energin är bevarad och vi kan lösa ut hastigheten v_1

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\delta \qquad (1)$$

3) Friktionskraften utför ett arbete. Kraften den verkar med är $-\mu_k mg$ under sträckan $s=R$, d.v.s. arbetet utfört är $-\mu_k mgR$. Hastigheten v_2 efter kan då beräknas

$$T_1 + \Delta W = T_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - \mu_k mgR = \frac{1}{2}mv_2^2,$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu_k gR} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{k}{m}\delta^2 - 2\mu_k gR} \qquad (2)$$

minustecken under rot!

Inte ett problem, men värt att reflektera över att om partikeln stannar på den sträva ytan uträttar <u>inte</u> friktionskraften arbetet $\mu_k mgR$, utan $\mu_k mgx$ där x är hur långt in den stannar.

4) När partikeln kommer in i loopen börjar tyngdkraften uträtta ett arbete. Kraften är $-mg$, sträckan är $2R$, så vi kan ta fram hastigheten v_3 i toppen med

$$T_2 + \Delta W = T_3$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - 2mgR = \frac{1}{2}mv_3^2$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{v_2^2 - 4gR} \overset{(2)}{=} \sqrt{\frac{k}{m}\delta^2 - 2\mu_k gR - 4gR} \qquad (3)$$

5) För att inte partikeln ska släppa bör det finnas en normalkraft. Detta finns i allmänhet då, för att förbli i centralrörelse,

$$N + mg = m\frac{v_3^2}{R}.$$

Extremfallet ges här av $N \to 0$, dvs

$$mg = m\frac{v_3^2}{R}$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad mg = \frac{m}{R}\left(\frac{k}{m}\delta^2 - 2\mu_k gR - 4gR\right)$$

$$\Rightarrow \quad mg(1 + 2\mu_k + 4) = \frac{k}{R}\delta^2$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{mgR}{k}}\sqrt{5 + 2\mu_k}$$

(Kort lösn:
Partikeln börjar i vila. Sedan uträttar fjädern arbetet $\frac{1}{2}k\delta^2$, den sträva ytan arbetet $-\mu_k mgR$, gravitationen arbetet $-mg2R$,

$$\Delta T = \Delta W \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 - \mu_k mgR - 2mgR \Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\delta^2 - 2\mu_k mgR - 4mgR}$$

För att inte släppa är tyngdkraften inte större än motsvarande centripetalacceleration,

$$mg = m\frac{v_3^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{mgR}{k}}\sqrt{5 + 2\mu_k}$$
)

<u>Kontroller:</u> Dimension: $[\quad] = \left(\frac{kg \cdot N/kg \cdot m}{N/m}\right)^{1/2} = m$ ok.

Kontroller: **Dimension:** $[\quad] = \left(\frac{kg \cdot N/kg \cdot m}{N/m}\right)^{1/2} = m$ ok.

Rimligt: Ökar med m, g, R, μ_k, minskar med k, ok.

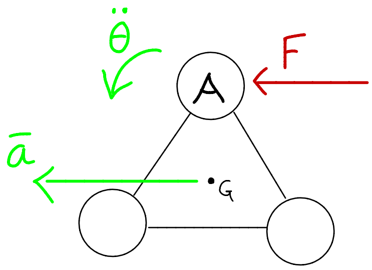
Går inte mot noll om $\mu_k \to 0$, ok.

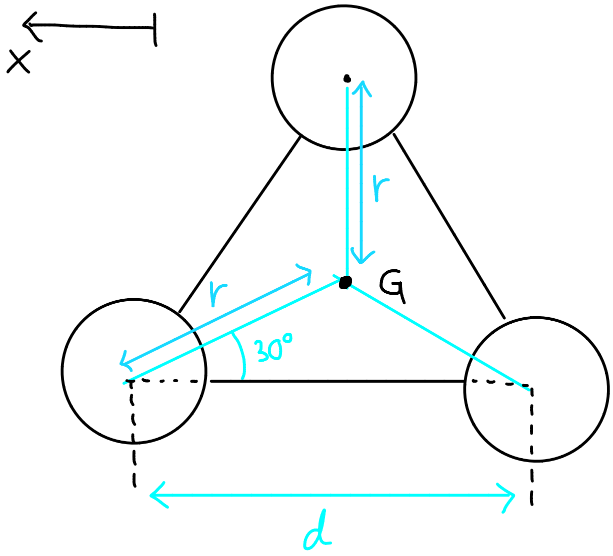
Svar: För att inte tappa kontakten behöver fjädern pressas ihop

$$\delta = \sqrt{\frac{mgR}{k}}\sqrt{5 + 2\mu_k}.$$

3)

Frilägning:





$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{d}{2r} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

Rörelseekvationen för masscentrum är

$$F\hat{x} = 3m\bar{a} \Rightarrow \boxed{\bar{a} = \frac{F}{3m}\hat{x}}$$

$$[\bar{a}] = \frac{\text{kg m}}{\text{kg s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Kraften F skapar ett moment kring tyngdpunkten G, vilket ger en vinkelacceleration för systemet enligt

$$\dot{H}_G = M$$

Rörelsemängdsmomentet H_G och momentet M ges av

$$H_G = 3mr^2\dot{\theta} = md^2\dot{\theta}$$
$$M = r \cdot F = \frac{\sqrt{3}}{3}dF$$

$$\Rightarrow \quad \dot{H}_G = md^2\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}dF \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}F}{3md}}$$

$$[\ddot{\theta}] = \frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}{\text{kg m}} = \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_A} = \bar{a} + r\ddot{\theta}\hat{x} = \left(\frac{F}{3m} + \frac{F}{3m}\right)\hat{x} = \boxed{\frac{2F}{3m}\hat{x}}$$

$$[a_A] = [\bar{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$