Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Lördagen den 28 augusti 2021 klockan 08.30-11.30, **hemtenta**.
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran. **Ställ privata frågor på Piazza, som jag besvarar och lägger in i en FAQ på Piazza. Kolla därför i FAQn innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

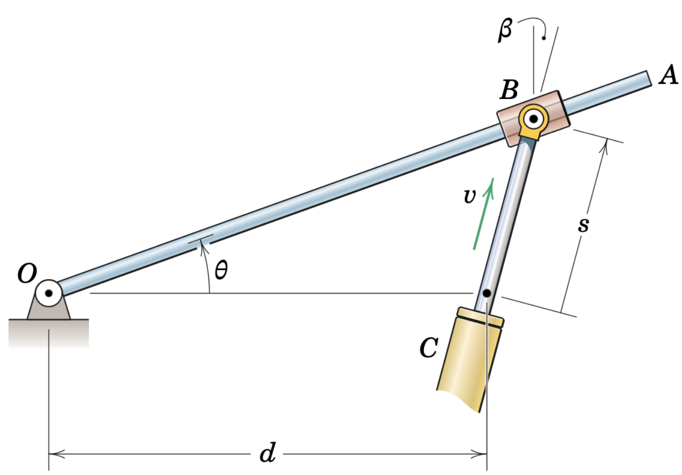
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Via Zoom, tid meddelas senare via Canvas.

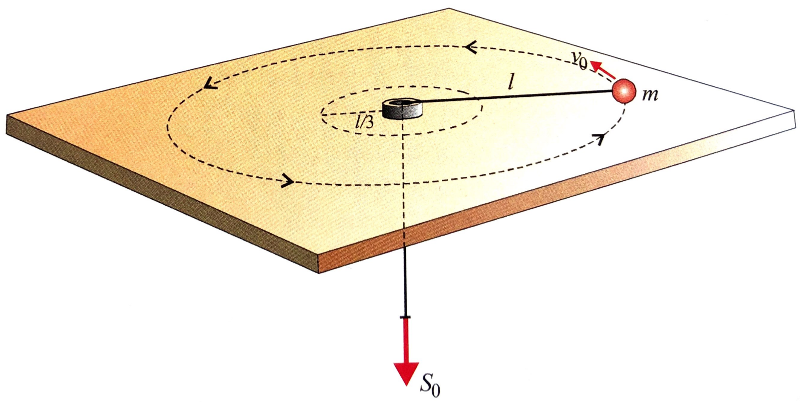
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

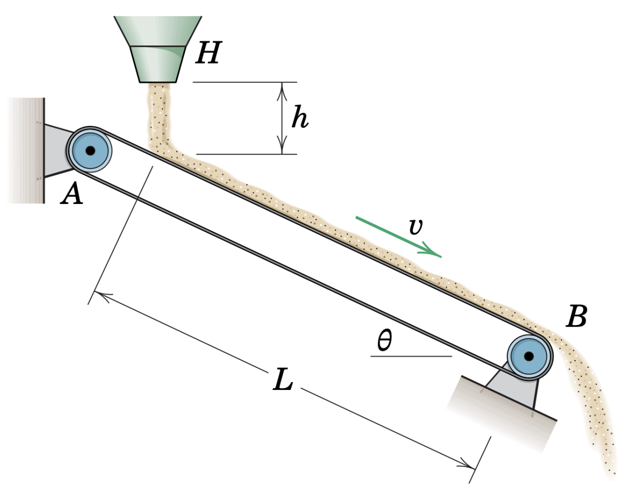
1. Den hydrauliska cylindern C ger fästpunkten B en fart v i riktning enligt figuren nedan. Hylsan fäst i B kan glida längs OA utan friktion. Bestäm vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ som funktion av v, förflyttningen s hos fästpunken B, sträckan d (konstant) samt vinkeln β.



2. En partikel med massan m är fäst i en tråd som löper genom ett hål i bordet. Avståndet från partikeln till hålet är från början l då partikeln ges hastigheten v_0 och rör sig i en cirkelbana med radien l på den glatta horisontella bordsytan. Avståndet från partikeln till hålet minskas sedan långsamt, genom att man drar i snörets fria ände, till $l/3$ så att partikeln rör sig i en ny cirkelbana. Bestäm spännkrafterna S_0 och S_1 som krävs för att hålla partikeln i de två cirkelbanorna samt det arbete U_{0-1} som måste uträttas för att flytta partikeln till den nya cirkelbanan.



3. Sand släpps ut från behållaren H med en försumbar hastighet, och faller sedan höjden h till det rullande bandet. Massflödet från behållaren är m' (massa/sekund). Härled ett uttryck för farten v för bandet när systemet blivit stationärt (dvs när hastigheten v inte längre ändras efter sanden börjat släppas ut ur behållaren). Anta att sanden snabbt uppnår bandets hastighet utan att studsa, och försumma friktion i trissorna A och B.



Lycka till!

1

Sökt: $\dot{\theta}$

Givet: d, β, r, s

Lösning:

Hylsan ges en hastighet

$$\vec{v}_\beta = v(\sin\beta, \cos\beta)$$

Denna kan också beskrivas i polära koordinater

$$\vec{v}_\beta = r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\hat{r}$$

$$= r\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) + \dot{r}(\cos\theta, \sin\theta)$$

Det ger oss

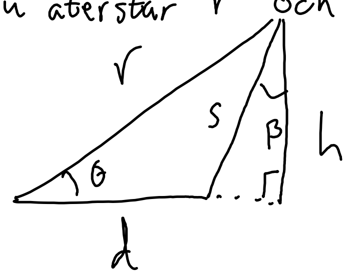
$$\Rightarrow \begin{cases} v\sin\beta = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ v\cos\beta = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Eliminera $\dot{r}$ och lös för $\dot{\theta}$

$$\Rightarrow v\left(\cos\beta - \sin\beta\tan\theta\right) = r\dot{\theta}\left(\cos\theta + \sin\theta\tan\theta\right)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r}\left(\frac{\cos\beta - \sin\beta\tan\theta}{\cos\theta + \sin\theta\tan\theta}\right) \qquad (1)$$

Nu återstår r och θ, vilket vi får ur geometrin:



$$\Rightarrow h = s \cdot \cos\beta$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(d + h\tan\beta)^2 + h^2} = \sqrt{(d + s\sin\beta)^2 + (s\cos\beta)^2}$$

$$\sin\theta = \frac{s\cos\beta}{r}, \quad \cos\theta = \frac{d + s\sin\beta}{r}, \quad \tan\theta = \frac{s\cos\beta}{d + s\sin\beta}$$

Insatt i (1) ger oss

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\cancel{r}} \left(\frac{\cos\beta - \sin\beta \dfrac{s\cos\beta}{d + s\sin\beta}}{\dfrac{d + s\sin\beta}{\cancel{r}} + \dfrac{s\cos\beta}{\cancel{r}} \dfrac{s\cos\beta}{d + s\sin\beta}} \right) = v \, \frac{(d + s\sin\beta)\cos\beta - s\sin\beta\cos\beta}{(d + s\sin\beta)^2 + s\cos^2\beta}$$

$$\boxed{= v \, \frac{d\cos\beta}{d^2 + 2ds\sin\beta + s^2}}$$

Kontroll: $[\dot{\theta}] = m/s \cdot \frac{m}{m^2} = 1/s$, bra!

Svar: Vinkelhastigheten blir

$$\dot{\theta} = v \, \frac{d\cos\beta}{d^2 + 2ds\sin\beta + s^2}$$

Alternativ lösning

$$v_{proj} = r\dot{\theta}$$

$$v_{proj} = (\hat{\theta} \cdot \vec{v})$$

$$\hat{r} = \frac{1}{r}(d + s\sin\beta, \ s\cos\beta)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r}(-s\cos\beta, \ d + s\sin\beta)$$

$$\vec{v} = v(\sin\beta, \ \cos\beta)$$

$$\hat{\theta} \cdot \vec{v} = \frac{v}{r} d\cos\beta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{r^2} d\cos\beta$$

2

Sökt: S_0, S_1, U_{0-1}

Givet: l, v_0, m

Plan: RMM-bevaring, centralrörelse, energiprincipen

Lösning: Vi börjar med spänningen S_0.

Partikeln rör sig i en cirkelbana, där centripetalaccelerationen, $\frac{v_0^2}{l}$, ges av S_0, d.v.s.

$$S_0 = m\frac{v_0^2}{l}.$$

Eftersom banan ändras genom att spännkraften i snöret ändras tillförs inget moment på systemet, och alltså blir rörelsemängdsmomentet bevarat.

I läge 0:

$$RMM_0 = l m v_0$$

I läge 1:

$$RMM_1 = \frac{\ell}{3} m v_1$$

$$RMM_0 = RMM_1 \Rightarrow v_1 = 3 v_0$$

Centripetalaccelerationen ges då av

$$a_c = \frac{v_1^2}{\ell/3} = 27 \frac{v_0^2}{\ell}$$

$$\Rightarrow S_1 = 27 S_0 = 27 m \frac{v_0^2}{\ell}$$

Arbetet som uträttas mellan dessa lägen blir skillnaden i deras energier (enl. E-principen) och eftersom det endast finns kinetisk energi

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{9}{2} m v_0^2$$

$$U_{0-1} = E_1 - E_0 = 4 m v_0^2.$$

Kontroller: $[S_0] = [S_1] = kg \frac{(m/s)^2}{m} = N$, bra!

$[U_{0-1}] = kg (m/s)^2 = N \cdot m$, bra!

$S_0 \cdot \frac{2\ell}{3} < U_{0-1} < S_1 \frac{2\ell}{3}$, bra!

Vi kan också integrera upp centrifugalkraften som kontroll

$$U_{0-1} = \int F\,ds = \int_{l}^{l/3} -m\,\frac{\left(v_0\frac{l}{x}\right)^2}{x}\,dx = m v_0^2 \int_{l/3}^{l} \frac{l^2}{x^3}\,dx$$

$$= m v_0^2 \left[-\frac{1}{2}\,\frac{l^2}{x^2}\right]_{l/3}^{l} = 4 m v_0^2 \quad , \text{ ok!}$$

3

Sökt: v

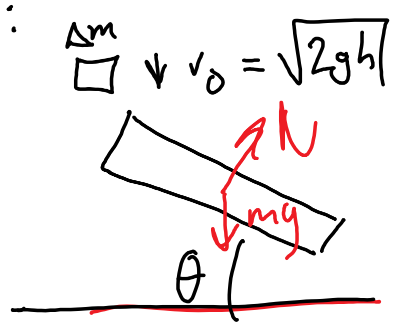
Givet: θ, l, h, m'

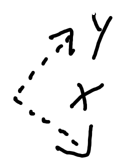
Plan: E-principen, $\dot{G} = F$

Lösning: Vi börjar att räkna ut sandens hastighet precis innan den faller på bandet med energiprincipen. Den potentiella energin $E_p = mgh$ omvandlas till kinetisk energi $E_k = \frac{1}{2} m u^2 \Rightarrow u = \sqrt{2gh}$.

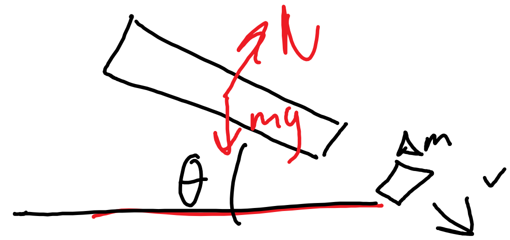
Låt oss nu titta på det stationära systemet vid t och $t + \Delta t$

t:





$t + \Delta t$:



All förändring i rörelsemängd kommer från det lilla elementet Δm:

$$\Delta G = \Delta m\sqrt{2gh}\cos\theta\,\hat{y} + \Delta m\left(v - \sqrt{2gh}\sin\theta\right)\hat{x}$$

Vi vet inget om normalkraften N, så låt oss titta i x-led (↘), N2 ger

$m' \approx \frac{\Delta m}{\Delta t}$, särskilt då Δt liten

$$\searrow: \quad mg\sin\theta = \underset{\approx \frac{\Delta G}{\Delta t}}{\dot{G}} = m'\left(v - \sqrt{2gh}\sin\theta\right)$$

Vi kan uttrycka massan på bandet som

$$m = \frac{m'}{v}L$$

$$\Rightarrow gL\sin\theta = v^2 - \sqrt{2gh}\,v\sin\theta$$

$$\left(v - \sqrt{\frac{gh}{2}}\sin\theta\right)^2 - \frac{gh}{2}\sin^2\theta - gL\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{gh}{2}}\sin\theta \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{gh}{2}\sin^2\theta + gL\sin\theta}$$

skulle ge negativt v

Kontroller: $[v] = \sqrt{m/s^2 \cdot m} = m/s$, bra

Svar: Farten blir

$$v = \sqrt{\frac{gh}{2}}\sin\theta + \sqrt{\frac{gh}{2}\sin^2\theta + gL\sin\theta}$$