Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Onsdagen den 7 april 2021 klockan 08.30-11.30, **hemtenta**.
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran. **Ställ privata frågor på Piazza, som jag besvarar och lägger in i en FAQ på Piazza. Kolla därför i FAQn innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, . . ., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

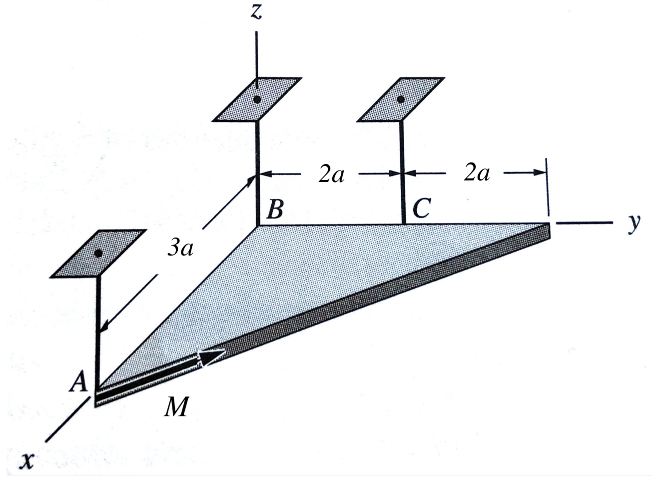
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Via Zoom, tid meddelas senare via Canvas.

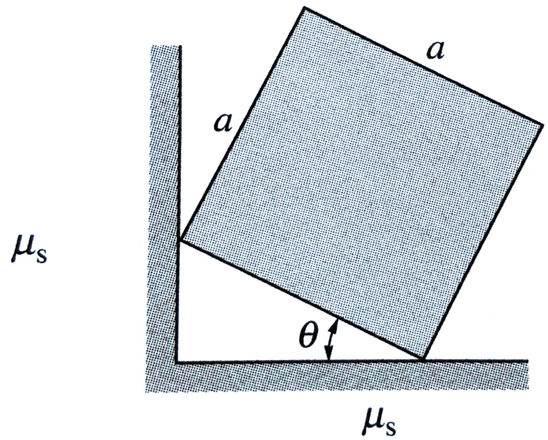
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

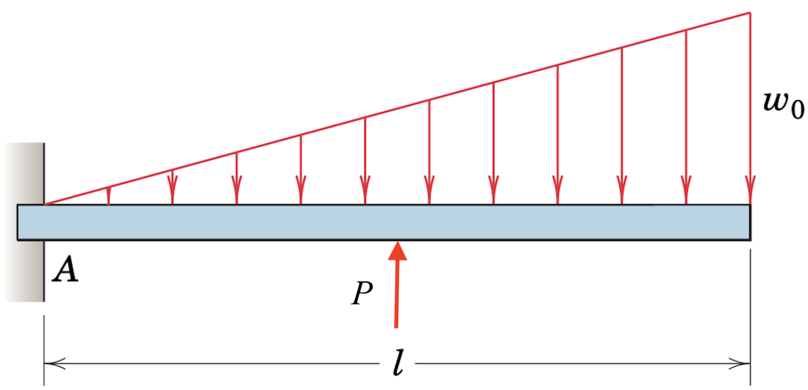
1. Den triangulära plattan är upphängd i tre vertikala stavar, vilka kan ta upp både tryck- och dragkrafter. Beräkna kraften i varje stav (och indikera tydligt om det är en drag- eller tryckkraft) då ett vridmoment M appliceras enligt figuren nedan. Bortse från plattans massa.



2. Bestäm det intervall för vinkeln θ där det homogena blocket kan vara i jämvikt. Bortse från de triviala fallen $\theta = 0$ och $\theta = 90°$. Notera att det är samma statiska friktionskoefficient μ_s vid båda kontaktytorna och antag att $\mu_s < 1$.



3. Bestäm skjuvkraften V och böjmomentet M i balken vid infästningspunkten A, samt rita ett diagram över skjuvkraften $V(x)$ över hela balkens längd. Punktkraften P angriper mitt på balken och har storleken $P = lw_0$.



Lycka till!

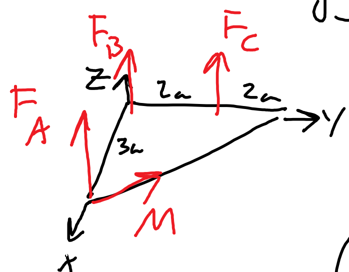
1

Sökt: F_A, F_B, F_C

Givet: a, M

Plan: Kraft och momentjämvikt (kring t.ex. B)

Lösning: Frilägg:



Kraftjämvikt $\uparrow: F_A + F_B + F_C = 0 \qquad (1)$

Momentjämvikt kring B:

$$(3a\hat{x}) \times (F_A \hat{z}) + (2a\hat{y}) \times (2a F_C \hat{z}) + \vec{M} = 0 \qquad (2)$$

Här vet vi att riktningen hos $\vec{M}$ är från hörn till hörn:

$$\vec{M} = M \frac{(-3a\hat{x} + 4a\hat{y})}{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}} = \frac{M}{5}(-3\hat{x} + 4\hat{y})$$

Insatt i (2) ger oss

$$-3aF_A\hat{y} + 2aF_C\hat{x} - \frac{3}{5}M\hat{x} + \frac{4}{5}M\hat{y} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2aF_c - \frac{3}{5}M = 0 \Rightarrow \underline{F_C = \frac{3}{10}\frac{M}{a}} \\ -3aF_A + \frac{4}{5}M = 0 \Rightarrow \underline{F_A = \frac{4}{15}\frac{M}{a}} \end{cases}$$

Insatt i (1) ger oss

$$\underline{F_B} = -F_A - F_C = -\frac{9+8}{30}\frac{M}{a} = \underline{-\frac{17}{30}\frac{M}{a}}$$

Kontroller: Enhet $[F] = \frac{[M]}{[a]} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}} = \text{N}$, bra

Allt proportionellt mot $\frac{M}{a}$, rimligt

Kring AC behöver F_B motverka M, vilket innebär

F_B nedåt, negativ bra. Samma tanke kring AB $\Rightarrow$ F_C positiv

och kring BC $\Rightarrow$ F_A positiv. Bra.

Svar: Krafterna från stängerna A, B och C blir

$$F_A = \frac{4}{15}\frac{M}{a}, \quad F_B = -\frac{17}{30}\frac{M}{a} \text{ resp. } F_C = \frac{3}{10}\frac{M}{a},$$

där minustecken indikerar kraft nedåt (alltså tryck).

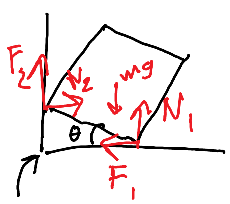
Sökt: Vinklar θ som uppfyller jämvikt.

Givet: μ_s, a, m?

Plan: Friktionsvillkor, kraft och momentjämvikt.

Lösning: Vi börjar med att konstatera att $\theta = 45^\circ$ är i jämvikt helt utan μ_s. Vi har sedan två olika fall, $0 < \theta < 45^\circ$ och $45^\circ < \theta < 90^\circ$. Låt oss börja med det första:

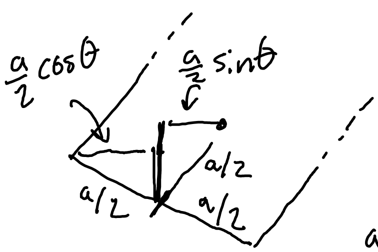
Frilägg: Kraftjämvikt: $\rightarrow: N_2 - F_1 = 0$ (1)



$\uparrow: F_2 + N_1 - mg = 0$ (2)

Momentjämvikt $\circlearrowleft O$: $a\cos\theta N_1 - a\sin\theta N_2 - x\,mg = 0$ (3)

Vad är x? Tyngdpunkten sitter i mitten så



$$x = \frac{a}{2}\cos\theta + \frac{a}{2}\sin\theta. \quad (4)$$

Vi vet också (ty normalkrafter) att $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$ (likhet för $\theta = 45^\circ$) (5)

och att friktionskrafterna i det kritiska läget blir

$$F_1 = \mu_s N_1, \quad F_2 = \mu_s N_2. \quad \text{(tecknen redan rätt)} \quad (6)$$

(4) och (6) insatt i (1), (2), (3) ger

$$\begin{cases} N_2 - \mu_s N_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \mu_s N_1 \\ \mu_s N_2 + N_1 - mg = 0 \quad \Rightarrow \mu_s^2 N_1 + N_1 = mg \Rightarrow N_1 = \frac{mg}{1+\mu_s^2} \\ a\cos\theta N_1 - a\sin\theta N_2 - \frac{a}{2}\cos\theta\, mg - \frac{a}{2}\sin\theta\, mg = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\cos\theta \frac{mg}{1+\mu_s^2} - a\sin\theta \frac{\mu_s mg}{1+\mu_s^2} - \frac{a}{2}\cos\theta\, mg - \frac{a}{2}\sin\theta\, mg = 0$$

dela med

delamed $amg\cos\theta$

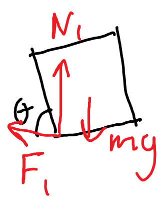
$$\Rightarrow \frac{1}{1+\mu_s^2} - \tan\theta \frac{\mu_s}{1+\mu_s^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\left(\frac{1}{1+\mu_s^2} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{\mu_s}{1+\mu_s^2}} = \frac{2-(1+\mu_s^2)}{(1+\mu_s^2)+2\mu_s} = \frac{1-\mu_s^2}{(1+\mu_s)^2} = \frac{1-\mu_s}{1+\mu_s}$$

Vilket är <1, d.v.s. $\theta_{critical} < 45^0$.

I intervallet $\tan^{-1}\left(\frac{1-\mu_s}{1+\mu_s}\right) < \theta < 45^0$ blir alltså kuben stabil. $(\theta \geq 0)$

Om $\theta > 45^0$? Då vill kuben välta åt andra hållet, N_2 (och F_2) blir noll, kvar blir:



men krafterna N_1 och F_1 går båda genom samma punkt, och kan omöjligen motverka momentet som mg tillför kring punkten $\Rightarrow$ momentjämvikt omöjlig!

Kontroller: Enhet: $\left[\frac{1-\mu_s}{1+\mu_s}\right] = \frac{1}{1} = 1$, enhetslöst, bra.

Om $\mu_s \to 0 \to \theta_{crit} \to 45^0$ (d.v.s. endast stabil: 45^0), bra

Om $\mu_s \to 1 \to \theta_{crit} \to 0^0$ (d.v.s. stabil för alla små vinklar), rimligt?

För $\mu_s > 1$, $0 < \theta < 45^0$ stabil.

Svar: Utöver de triviala fallen är blocket i jämvikt för

$$\underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{1-\mu_s}{1+\mu_s}\right)}_{} < \theta < 45^0.$$

(eller 0 om negativ)

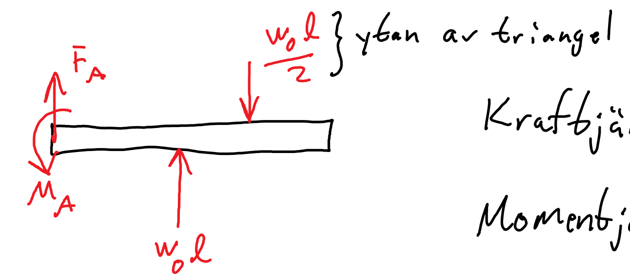
3

<u>Sökt:</u> Skjuvkraft och böjmoment i A, diagram skjuvkraft överallt.

<u>Givet:</u> w_0, l

<u>Plan:</u> Frilägg, Frilägg med snitt, kraft och momentjämvikt.

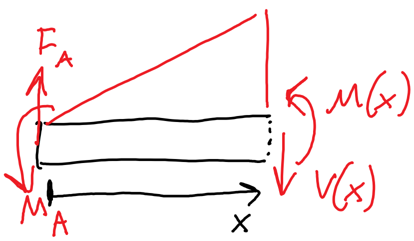
<u>Lösning:</u> Frilägg hela balken. Lasten kan då ersättas med en punktkraft i sitt centrum, $\frac{2}{3}l$ från A.



Kraftjämvikt: $\uparrow: w_0 l + F_a - \frac{w_0 l}{2} \Rightarrow F_A = -\frac{w_0 l}{2}$

Momentjämvikt: $\curvearrowleft A: \frac{l}{2} w_0 l + M_A - \frac{2l}{3}\frac{w_0 l}{2} \Rightarrow M_A = -\frac{w_0 l^2}{6}$

Gör snitt vid x, $0 < x < \frac{l}{2}$, frilägg igen.



Vi kan återigen ersätta lasten med en punktkraft, men endast för den del som ingår i friläggningen. Storleken blir då $\frac{w_0 \frac{x}{l} \cdot x}{2}$ och angreppspunkten $\frac{2}{3}x$.

Kraftjämvikt $\uparrow: F_A - V(x) - \frac{w_0 x}{2} = 0 \Rightarrow V(x) = -\frac{w_0 l}{2} - \frac{w_0 x^2}{2l} = -\frac{w_0}{2}\left(l + \frac{x^2}{l}\right)$ (1)

Momentjämvikt $\curvearrowleft A: M_A + M(x) - V(x)x - \frac{2x}{3}\frac{w_0 x^2}{2l} = 0$

$$\Rightarrow M(x) = V(x)x + \frac{w_0 x^2}{3} - M_A$$

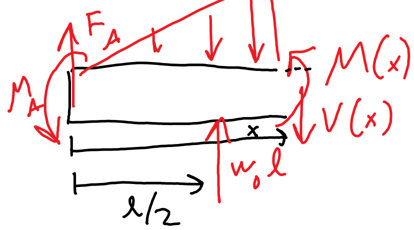
$$= -\frac{w_0}{2}\left(l + \frac{x^2}{l}\right)x + \frac{w_0 x^3}{3} + \frac{w_0 l^2}{6}$$

I punkten A är $x = 0$

$\Rightarrow \underline{V(0) = -\frac{w_0 l}{2}}$ och $\underline{M(0) = \frac{w_0 l^2}{6}}$

För att skissa $x > \frac{l}{2}$ behöver vi göra ett snitt även där

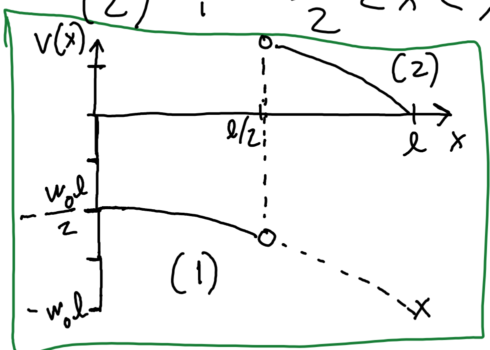
För att skissa $x > \frac{l}{2}$ behöver vi göra ett snitt även där



$$F\uparrow: F_A - V(x) - \frac{w_0 x^2}{2l} + w_0 l = 0$$

$$\Rightarrow V(x) = w_0 l - \frac{w_0 l}{2} - \frac{w_0 x^2}{2l} = \frac{w_0}{2}\left(l - \frac{x^2}{l}\right) \qquad (2)$$

Vi kan nu skissa (1) i $0 < x < \frac{l}{2}$ och (2) i $\frac{l}{2} < x < l$



Följer en parabel, med en diskontinuitet av storlek P i $l/2$

Kontroller: $[V] = \left[-\frac{w_0 l}{2}\right] = \frac{N/m \cdot m}{1} = N$, ok

$[M] = \left[-\frac{w_0 l^2}{6}\right] = \frac{N/m \cdot m^2}{1} = Nm$, ok

Tecken: F_A är nedåt $\Rightarrow V(0)$ uppåt, alltså negativ, bra

M_A är medurs $\Rightarrow M(0)$ moturs, alltså negativ, bra

$V(x)$-diagram "börjar" med en diskontinuitet (F_A punktkraft), diskontinuitet vid P, slutar på noll, bra.

$w(x)$ linjär $\Rightarrow V(x)$ kvadratisk, bra.

Svar: Skjuvkraften i A blir

$$V(0) = -\frac{w_0 l}{2} \qquad \text{(alltså riktad uppåt),}$$

böjmomentet i A blir

$$M(0) = \frac{w_0 l^2}{6} \qquad \text{(alltså riktad moturs)}$$

och skjuvkraftsdiagram ser ut som nedan

och skjuvkraftsdiagram ser ut som nedan.