Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Torsdagen den 18 mars 2021 klockan 08.30-11.30, **hemtenta**.
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran. **Ställ privata frågor på Piazza, som jag besvarar och lägger in i en FAQ på Piazza. Kolla därför i FAQn innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, . . ., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

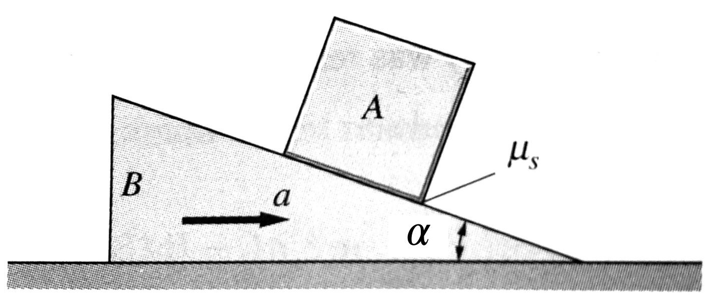
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Via Zoom, tid meddelas senare via Canvas.

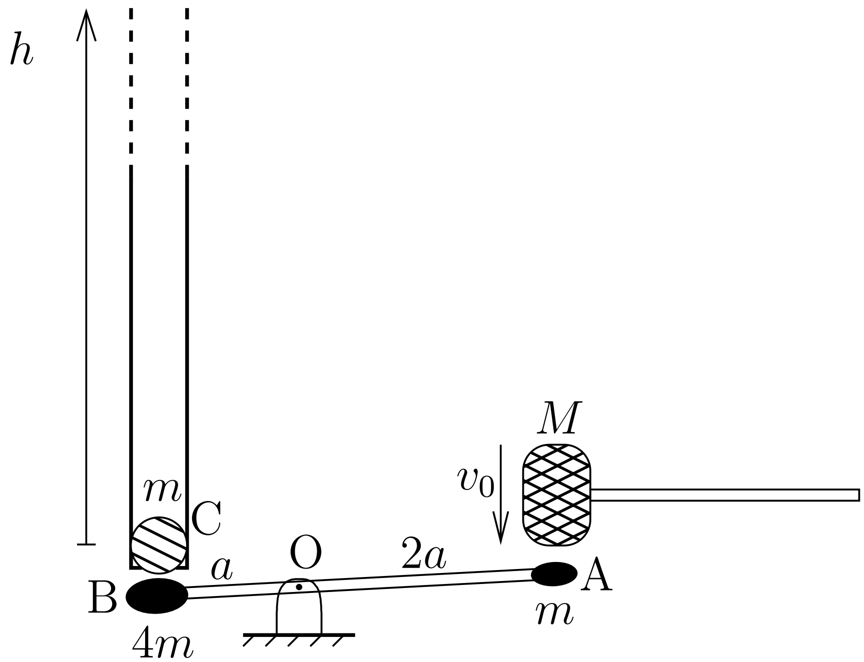
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

1. Block A, med massan m_A, är placerat på den lutande ytan på kilen B enligt figuren nedan. Den statiska friktionskoefficienten mellan A och B är μ_s, Bestäm den minsta accelerationen a hos kilen som skulle leda till att blocket A börjar glida uppför den lutande ytan på kilen. Det gäller att $\tan\alpha < 1/\mu_s$.



Figur I: Ett klubbspel på Tivoli i Köpenhamn.



Figur II: Skiss av vår modell av klubbspelet

2. I den här uppgiften ska vi studera ett ”klubbspel” som brukar finnas på nöjesparker, t.ex. på Tivoli i Köpenhamn som visas i figur I. Spelet går ut på att med en klubba slå på en ”knapp” (A i figur II), som sen omsätts i att en liten boll (C i figur II) åker upp en viss höjd h.

   Figur II visar en enkel skiss av vår modell av klubbspelet. En klubba med massa M slås med en fart v_0 mot ”knappen” (A), som har massan m. Sammanslagningen sker med en fullständigt inelastisk stöt. Vipparmen, som kan svänga fritt kring punkten O, får då vinkelhastigheten ω_1. Den andra ändan av vipparmen (B), med massan $4m$, slår sen till bollen (C), som har massan m. Den andra stöten har en stötkoefficient e.

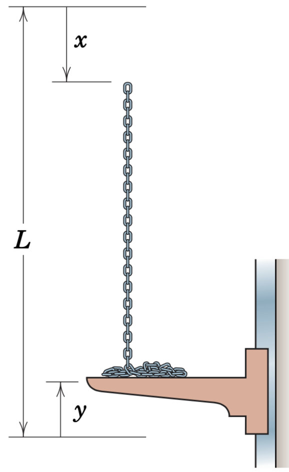
   Frågor:

   (a) Vad blir vinkelhastigheten ω_1 efter den första stöten (mellan klubba och ”knapp”)? (2 p)

   (b) Vad blir bollens maximala höjd h? (4 p)

   Vipparmens totala vridningsvinkel i problemet kan försummas.

3. Kedjan med total längd L och densitet ρ (massa per längdenhet) släpps från vila vid $x = 0$ samtidigt som plattformen startar från $y = 0$ och rör sig uppåt med konstant hastighet v. Bestäm ett uttryck för den totala kraften R med vilken kedjan trycker på plattformen vid tiden t efter att kedjan släpps.



Lycka till!

1

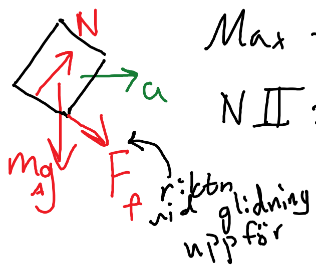
<u>Sökt</u>: a för glidning

<u>Givet</u>: m_A, μ_s, α

<u>Plan</u>: Glidning innebär max-friktion

Frilägg + NII

<u>Lösnin</u>: Frilägg blocket A



Max friktion innan glidning $\Rightarrow$ $F_f = \mu_s N$ (1)

NII: $\rightarrow$: $N \sin\alpha + F_f \cos\alpha = m_A a$ (2)

$\uparrow$: $N\cos\alpha - m_A g - F_f \sin\alpha = 0$ (3)

(1) i (3) ger

$$N\cos\alpha - m_A g - \mu_s N \sin\alpha = 0 \Rightarrow N = \frac{m_A g}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha} \quad (4)$$

(1) och (4) i (2) ger

$$\frac{m_A g}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}\left(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha\right) = m_A a$$

$$\Rightarrow a = g \, \frac{\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}$$

<u>Kontroller</u>: Dim: $[a] = [g]\cdot[1] = m/s^2$, bra

$\mu_s \sin\alpha > \cos\alpha$? Glidning kommer aldrig att ske,

Större a $\Rightarrow$ större N $\Rightarrow$ större max F_f, som aldrig uppnås!

<u>Svar</u>: Blocket A börjar glida uppför backen om

$$a > g \, \frac{\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}$$

OCH

$$\frac{1}{\mu_s} > \tan\alpha.$$

2

Sökt: vinkelhastighet ω_1 och höjd h

Givet: M, m, a, v_0, e

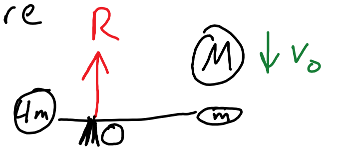
Plan: 1) RMM-bevaring (kring O, stor extern kraft där) + inelastisk stöt i första kollisionen

2) RMM-bevaring (— " —) + stötkoeff e i andra kollisionen

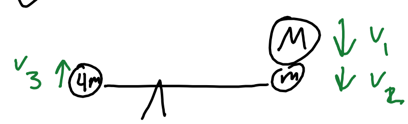
3) E-principen därefter $E_k \to E_p$

Lösning: 1) Första kollisionen

Före



Efter



Enda (impulsiva) externa kraften är i O. $\Rightarrow$ RMM kring O bevarat!

$$RMM^{\circlearrowright}_{\text{före}} = -2a\,Mv_0 \qquad RMM^{\circlearrowright}_{\text{efter}} = -2a(Mv_1 + mv_2) - a\,4mv_3$$

Här vet vi att $v_2 = v_1$ ty fullständigt inelastisk, $\omega_1 = \frac{v_2}{2a}$ ← i riktning medurs! (ren rotation) och $v_3 = a\omega_1 = \frac{v_2}{2}$ (ren rotation)

Så detta kombinerat med att

$$RMM_{\text{före}} = RMM_{\text{efter}}$$

$$\Rightarrow -2aMv_0 = -2a(M+m)(2a\omega_1) - a\,4m(a\omega_1)$$

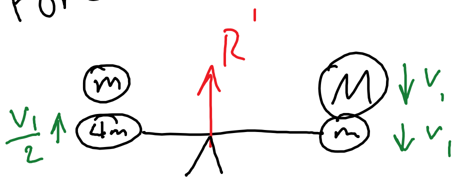
$$= -4a^2\omega_1(M+2m)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{v_0}{2a}\,\frac{M}{M+2m}} \qquad \text{Enhet: } \frac{m/s}{m}\cdot\frac{kg}{kg} = 1/s, \text{ bra}$$

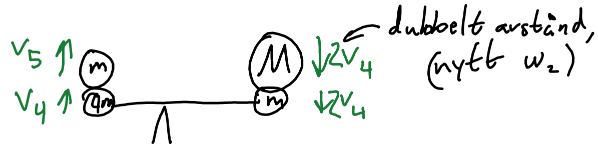
2) Nästa kollision:

3) Nästa kollision:

Före:



Efter:



$$RMM_{före,2} = (\text{fortfarande}) = -2aMv_0 \qquad RMM_{efter,2} = -2a(M+m)2v_4 - a4mv_4 - amv_5$$

Här vet vi att stöten har koefficient e, d.v.s.

$$v_5 - v_4 = e\frac{v_1}{2} \Rightarrow v_4 = v_5 - e\frac{v_1}{2} = v_5 - e\frac{v_0}{2}\frac{M}{M+2m}$$

insatt i

$$RMM_{före,2} = RMM_{efter,2}$$

$$\Rightarrow -2aMv_0 = -a(4M+4m+4m+m)v_5 + e\frac{v_0}{2}4a\cancel{(M+2m)}\frac{M}{\cancel{M+2m}}$$

$$\Rightarrow v_5 = \frac{2aMv_0 + 2aev_0M}{a(4M+9m)}$$

$$= \frac{2M(1+e)}{4M+9m}v_0 \qquad (1)$$

3) Energiberaring hos bollen sista biten (endast gravitation extern kraft)

Före

$$E_p^{(1)} = 0$$

$$E_k^{(1)} = \frac{1}{2}mv_5^2$$

Efter

$$E_p^{(2)} = mgh$$

$$E_k^{(2)} = 0$$

$$E_p^{(1)} + E_k^{(1)} = E_p^{(2)} + E_k^{(2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_5^2 = mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2g}v_5^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2g}\left[\frac{2M(1+e)}{4M+9m}\right]^2 v_0^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2g} v_5^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2g} \left[\frac{2M(1+e)}{4M+9m}\right]^2 v_0^2$$

Enhetscheck: $\left[\frac{1}{m/s^2}\right] \cdot [1]^2 \cdot \left[m/s\right]^2 = [m]$, bra!

Andra kontroller: $\to \frac{1}{2g} v_0^2$ om $M \gg m$ och $e = 1$, bra

$\to 0$ om $m \gg M$, bra

Svar: Vinkelhastigheten efter första kollisionen blir

$$\omega_1 = \frac{v_0}{2a} \frac{M}{M+2m}$$

Och bollen når den maximala höjden

$$h = \frac{1}{2g} \left[\frac{2M(1+e)}{4M+9m}\right]^2 v_0^2 .$$

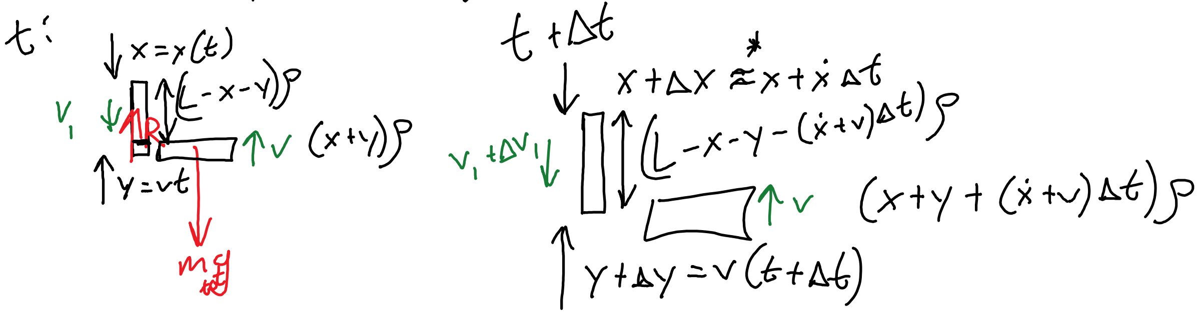
3

Sökt: Kraft R

Givet: ρ, L, v

Plan: Impulslagen + Frilägg lämplig del av kedjan

Lösning: Titta på hela systemet vid t och $t+\Delta t$



Kedjan rör sig med den hastighet x ökar med, d.v.s. $v_1 = \dot{x}$ och $\Delta v_1 \simeq \ddot{x}\Delta t$ *   *(exakt i gräns "Δ→d")

Rörelsemängd före

$$G_1 = -(L-x-vt)\rho\dot{x} + (x+vt)\rho v$$

Efter

$$G_2 = -\left(L-x-vt-(\dot{x}+v)\Delta t\right)\rho\left(\dot{x}+\ddot{x}\Delta t\right)$$
$$+\left(x+vt+(\dot{x}+v)\Delta t\right)\rho v$$

$$\Delta G = G_2 - G_1 = -(L-x-vt)\rho\,\ddot{x}\Delta t + (\dot{x}+v)\Delta t\rho\dot{x}$$
$$+(\dot{x}+v)\Delta t\rho v + \underbrace{O(\Delta^2)}_{\text{försvinner i gräns}}$$

$$\frac{\Delta G}{\Delta t} = \sum F = R - m_{tot}g = R - L\rho g$$

$$\Rightarrow -(L-x-vt)\rho\ddot{x} + (\dot{x}+v)\rho(\dot{x}+v) = R - L\rho g$$

$$\Rightarrow R = L\rho g + (\dot{x}+v)^2\rho - (L-x-vt)\rho\ddot{x}$$

x i fritt fall, $\ddot{x} = g$, $\dot{x} = gt$, $x = g\frac{t^2}{2}$

$$\Rightarrow R = L\rho g + (v+gt)^2\rho - (L - \tfrac{1}{2}gt^2 - vt)\rho g$$

$$= \underbrace{(v+gt)^2\rho}_{\text{Mängden kedja som bromsas varje sekund}} + \underbrace{(vt + \tfrac{1}{2}gt^2)\rho g}_{\text{Mängden kedja som ligger på hyllan}}$$

Kontroller: Dimension $\quad [R] = \underbrace{[m/s]^2\left[\frac{kg}{m}\right]}_{kg\, m/s^2} + \underbrace{(\underbrace{[m/s][s] + [m/s^2][s]^2}_{m})\frac{kg}{m}\frac{m}{s^2}}_{\frac{kg\,m}{s^2},}$ bra!

Övriga rimlighetskontroller:

Svar: Kraften från hyllan blir

$$R = (v+gt)^2\rho + (vt + \tfrac{1}{2}gt^2)\rho g.$$