

Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Tisdagen den 12 januari 2021 klockan 14.00-17.00, **hemtenta**.

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna

Examinator: Ulf Gran

Jour: Ulf Gran. **Ställ privata frågor på Piazza, som jag besvarar och lägger in i en FAQ på Piazza. Kolla därför i FAQn innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

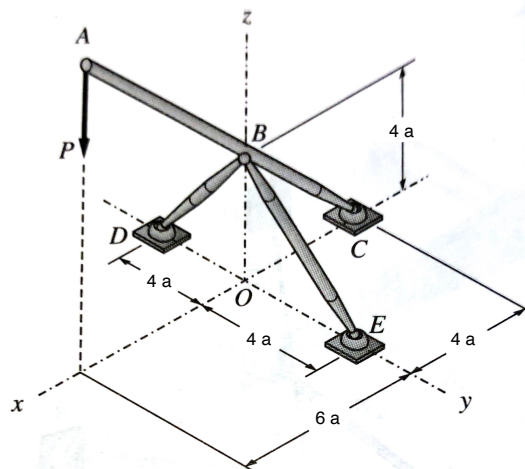
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Via Zoom, tid meddelas senare via Canvas.

Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g .

1. Konstruktionen i figuren består av tre stänger, BD , BE och ABC . Bortse från vikten hos stängerna, och betrakta alla fästpunkter som ledat infästade. Bestäm storleken på krafterna i stängerna BD och BE som resulterar från en lodrät kraft P i punkten A .



2. Det finns en segeltyp som kallas gaffelsegel, där seglet i överändan stagas ut av en *gaffelbom* (markerad med en grön oval i figur I).

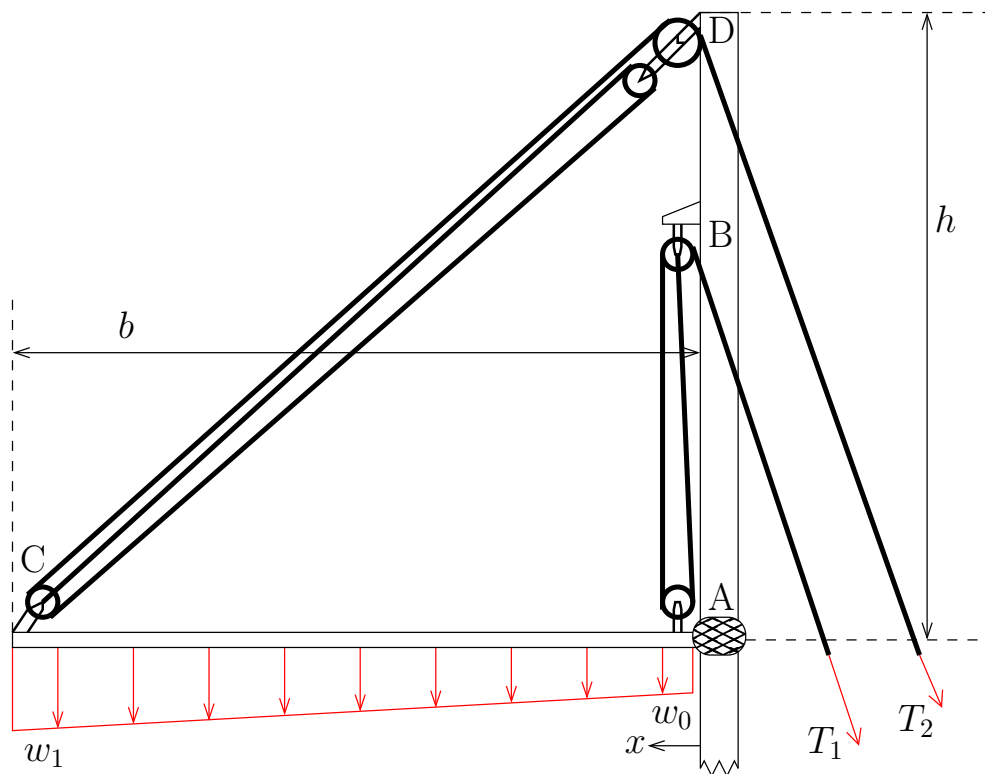


© Axel Petterson, 2007, Wikipedia

Figur I: Skonaren *Ingo* har tre gaffelriggade master, och kan normalt beskådas vid sin kajplats i Klippans ångbåtsbrygga här i Göteborg.

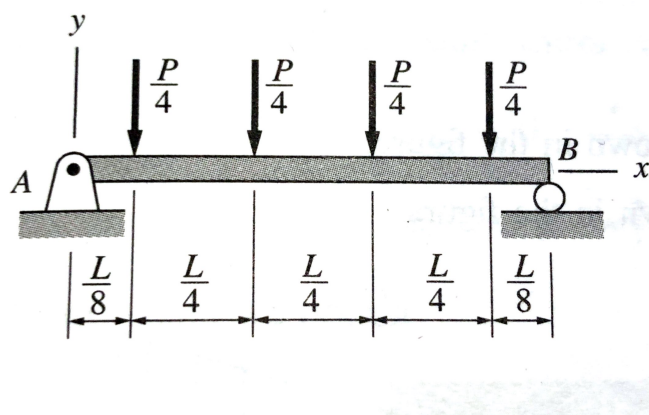
I den här uppgiften ska vi studera en **förenklad modell** av hur gaffelbommen hissas upp. Figur II visar vår förenklade modell av hur gaffelbommen är upphängd med taljor i repen B–A–B samt D–C–D–C. Bommen hålls **horisontell** (vinkelrät mot masten). Seglets tyngd samt bommens egentyngd motsvaras av lasten $w(x)$, som ökar linjärt från $w(0) = w_0$ inne vid masten, till $w(b) = w_1$ i ytterändan. **Trissornas bredd kan försummas**, alltså kan trissorna i A, B och D antas vara helt invid masten, och trissorna i A och C vara på samma höjd som bommen.

- (a) Bestäm den från lasten $w(x)$ motsvarande resultatkraften R , och dess angreppspunkt $\bar{x}$ längs med bommen. (2p)
- (b) Friktionskoefficienten mellan bommen och masten är μ_s . Bestäm T_1 och T_2 som krävs för att hissa upp bommen om den fortsatt hålls horisontell (från stillastående, enl. figur II). (4p)



Figur II: En skissad modell av en gaffelbom som hänger vinkelrätt ut från masten. Trissornas bredd (hjulens diameter) kan anses försumbara.

3. Rita diagram över skjuvkraften V och böjmomentet M för balken nedan, vilken belastas med den totala kraften P uppdelad enligt figur.



Lycka till!

1

Sökt: Krafterna i stängerna BD och BE ($\vec{F}_D$, $\vec{F}_E$) 's storlek

Givet: längder a, kraft P

Plan: Frilägga + jämvikt

Lösning: Kraften i C kan ha komponenter i alla riktningar, och vi är inte intresserade av någon. Låt oss därför fokusera på momentjämvikt kring C.



Frilägg stängen AC.

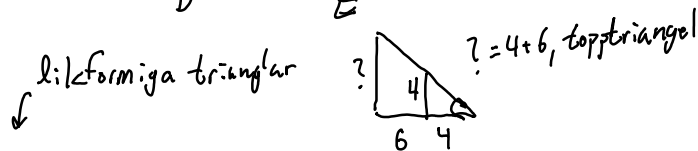
$\vec{F}_D$ kommer att vara riktad som $\vec{DB}^*$
 $\vec{F}_E$ ———— $\vec{EB}^*$

$$\vec{F}_D = F_D \frac{\vec{DB}}{|\vec{DB}|} = F_D \frac{(0, 4, 4)}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2}} = F_D \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}_E = F_E \frac{\vec{EB}}{|\vec{EB}|} = F_E \frac{(0, -4, 4)}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2}} = F_E \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{2}}$$

Momentjämvikt kring C

$$0 = \sum \vec{M} = \vec{CA} \times \vec{P} + \vec{CB} \times \vec{F}_D + \vec{CE} \times \vec{F}_E$$



$$= (10, 0, 10)a \times (0, 0, -P) + (4, 0, 4)a \times \frac{F_D}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) + (4, 0, 4)a \times \frac{F_E}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

$$= 10aP(0, 1, 0) + 2\sqrt{2}aF_D(-1, -1, 1) + 2\sqrt{2}aF_E(1, -1, -1)$$

$$= (2\sqrt{2}F_E - 2\sqrt{2}F_D, 10P - 2\sqrt{2}F_D - 2\sqrt{2}F_E, 2\sqrt{2}F_D - 2\sqrt{2}F_E)a$$

Detta ger oss alltså komponentvis två (eftersom x- och z-komp linj. her.)

ekvationer

$$0 = 2\sqrt{2} F_E - 2\sqrt{2} F_D \Rightarrow F_D = F_E \quad (1)$$

och

$$\begin{aligned} 0 &= 10P - 2\sqrt{2} F_D - 2\sqrt{2} F_E \\ (1) \Rightarrow 0 &= 10P - 4\sqrt{2} F_E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_E = \frac{10P}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4} P$$

$$\begin{aligned} (1) \\ \Rightarrow F_D &= \frac{5\sqrt{2}}{4} P \end{aligned}$$

Kontrollen: Rätt enhet, väntat tecken, bra.

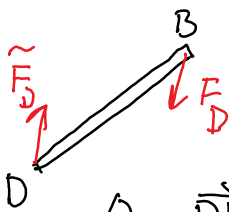
Svar: Storleken på kraften i BD blir

$$|F_D| = \frac{5\sqrt{2}}{4} |P|,$$

och storleken på kraften i BE blir

$$|F_E| = \frac{5\sqrt{2}}{4} |P|$$

* Om detta inte är intuitivt, frilägg stängon BD (eller BE)



Kraftjämvikt ger att $\vec{F}_D = -\vec{F}_E$.

Momentjämvikt kring D ger oss att

$0 = \vec{DB} \times \vec{F}_D$, d.v.s. $\vec{F}_D$ måste vara parallell (sammanfalla) med $\vec{DB}$, vilket ville visas.

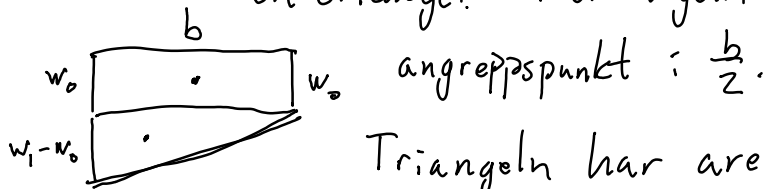
2

Sökt: Resultatkraft R , angreppspunkt $\bar{x}$, T_1 och T_2 för hisning

Givet: μ_s , $w(x)$, w_0 , w_1 , b , h

Plan: a) Dela upp i kända kroppar (eller integrera)
b) frilägg, trissor, jämvikt, friktionsvillkor

Lösning: a) Vi delar upp lasten i två kroppar: en rektangel och en triangel. Rektangeln har area bw_0 och



angreppspunkt i $\frac{b}{2}$.
Triangeln har area $\frac{b(w_1 - w_0)}{2}$ och angreppspunkt i $\frac{2b}{3}$

$$\text{Total angreppspunkt } \bar{x} = \frac{\text{area}_1 \cdot \text{punkt}_1 + \text{area}_2 \cdot \text{punkt}_2}{\text{area}_1 + \text{area}_2}$$

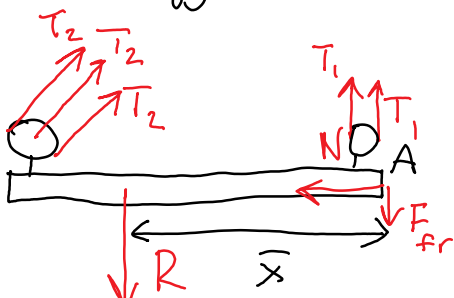
$$= \frac{bw_0 \frac{b}{2} + \frac{b}{2}(w_1 - w_0) \frac{2b}{3}}{bw_0 + \frac{b}{2}(w_1 - w_0)}$$

$$= \frac{\frac{b}{2}w_0 + \frac{b}{3}w_1 - \frac{b}{3}w_0}{\frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}w_1}$$

$$= \frac{b}{3} \frac{w_0 + 2w_1}{w_0 + w_1} \quad (1) \quad \text{Kontroll: rätt enhet, ligger mellan } \frac{b}{3} \text{ (mot svar } w_1=0) \text{ och } \frac{2b}{3} \text{ (mot svarar } w_0=0) \text{ bra.}$$

Storleken R ges av $R = \text{area}_1 + \text{area}_2 = \frac{1}{2}b(w_0 + w_1)$ (2)

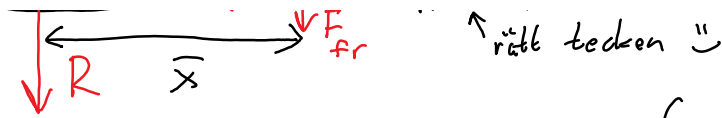
b) Frilägg bom inkl trissor:



Kritiskt läge för statisk friktion:

$$F_{fr} = |F_{fr}| = \mu_s N$$

↑ rätt tecken "



Riktningen på krafterna T_2 blir $\left\{ \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right\} \frac{(-b, h)}{\sqrt{b^2+h^2}}$

Kraftjämvikt:

$$x: -3T_2 \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}} + N = 0 \Rightarrow N = \frac{3b}{\sqrt{b^2+h^2}} T_2 \quad (3)$$

$$y: 3T_2 \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} + 2T_1 - R - \mu N = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} R + \frac{\mu}{2} \frac{3b}{\sqrt{b^2+h^2}} T_2 - \frac{3h}{2\sqrt{b^2+h^2}} T_2 \quad (4)$$

Momentjämvikt kring A

$$\sum \mathcal{M}_A: -b 3T_2 \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} + \bar{x} R = 0$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{\bar{x} R}{3bh} \sqrt{b^2+h^2} = \frac{b}{3} \frac{\frac{w_0+2w_1}{w_0+w_1} \cdot \frac{1}{2} b (w_0+w_1)}{3bh} \sqrt{b^2+h^2}$$

$$= \frac{b\sqrt{b^2+h^2}}{18h} (w_0+2w_1) \quad (5)$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} b (w_0+w_1) + \left(\frac{\mu}{2} \frac{3b}{\sqrt{b^2+h^2}} - \frac{3h}{2\sqrt{b^2+h^2}} \right) \frac{b\sqrt{b^2+h^2}}{18h} (w_0+2w_1)$$

$$= \frac{1}{4} b (w_0+w_1) + \frac{b}{12h} (w_0+2w_1) (\mu b - h)$$

Kontroller: Enheter rätt.

T_2 fördelad 1:2 mellan w_0, w_1 bra *

T_1 har ett symmetriskt bidrag i w_0, w_1 och ett T_2 bidrag, bra.
(dvs. total kraft R)

Svar: a) Resultatkraften från lasten blir

Svar: a) Resultatkraften från lasten blir

$$R = \frac{1}{2} b (w_0 + w_1)$$

verkar vid

$$\bar{x} = \frac{b}{3} \frac{w_0 + 2w_1}{w_0 + w_1}$$

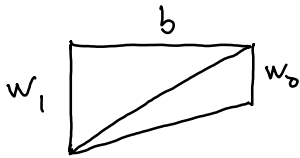
b) Kraften T_1 behöver vara

$$T_1 = \frac{1}{4} b (w_0 + w_1) + \frac{b}{12h} (w_0 + 2w_1) (\mu b - h)$$

Och kraften T_2 behöver vara

$$T_2 = \frac{b \sqrt{b^2 + h^2}}{18h} (w_0 + 2w_1).$$

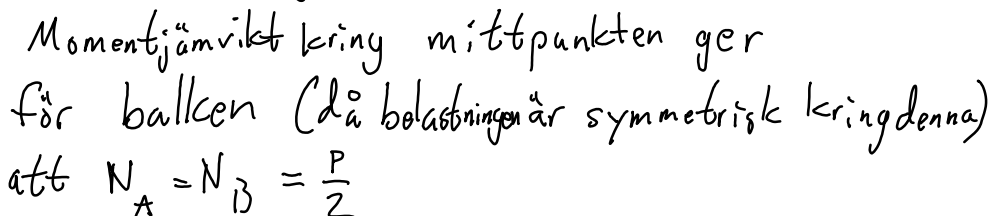
* Detta blir tydligare om man gör den något mer intuitiva uppdelningen av lasten i två trianglar:



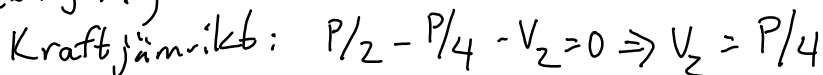
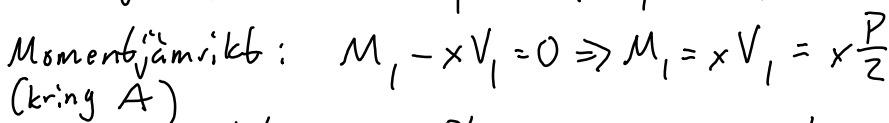
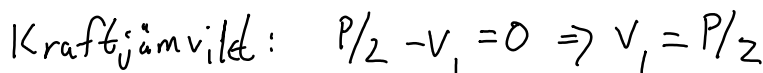
Som tydligt har area $\frac{bw_0}{2}$ och $\frac{bw_1}{2}$
och angreppspunkter $1\frac{b}{3}$ resp $2\frac{b}{3}$.

Plan: frilägg, jämvikt, snitt.

Kraftjämvikt ger $N_A + N_B = P$



Gör snitt vid x för $0 < x < \frac{L}{8}$, $\frac{L}{8} < x < \frac{3L}{8}$, $\frac{3L}{8} < x < \frac{5L}{8}$, $\frac{5L}{8} < x < \frac{7L}{8}$ och $\frac{7L}{8} < x < L$



Momentjämvikt: $M_z - xV_z - \frac{L}{8} \frac{P}{4} \Rightarrow M_z = xV_z + \frac{L}{8} \frac{P}{4}$
 $= x \frac{P}{4} + \frac{L}{8} \frac{P}{4}$

Kraftgleichung: $P/2 - P/4 - P/4 - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 0$

Momentjämvikt: $M_3 - xV_3 - \frac{L}{8} \frac{P}{4} - \frac{3L}{8} \frac{P}{4} \Rightarrow M_3 = xV_3 + (1+3) \frac{L}{8} \frac{P}{4}$

... (antingen fortsätt eller argumentera utifrån symmetri)

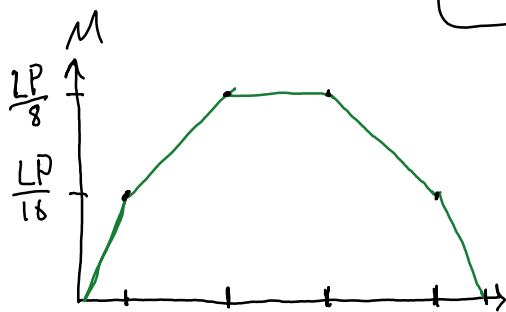
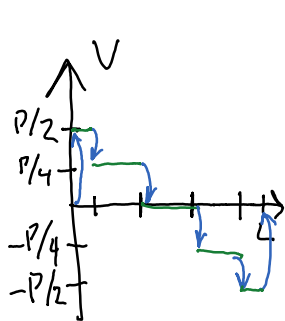
$$\Rightarrow V(x) = \frac{P}{4} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} 2 & 0 < x < L/8 \\ 1 & L/8 < x < 3L/8 \\ 0 & 3L/8 < x < 5L/8 \\ -1 & 5L/8 < x < 7L/8 \\ -2 & 7L/8 < x < L \end{array} \right\}$$

$$(1) \quad \mathbb{P}(C_1) = 1, \quad \mathbb{P}(C_0) = 1$$

$$M(x) = x \frac{P}{4} \underbrace{\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}}_{\text{bidrag från } V} + \underbrace{\frac{L}{8} \frac{P}{4} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+3=4 \\ 1+3+5=9 \\ 1+3+5+7=16 \end{Bmatrix}}_{\text{bidrag från örrigt}}$$

$M(x)$ styckvislinjär, lätt att rita med ändpunkterna

$$0, \frac{L}{8} \frac{P}{2}, \frac{3L}{8} \frac{P}{4} + \frac{L}{8} \frac{P}{4} = \frac{L}{8} \cdot P, \underbrace{\frac{L}{8} \cdot P, \frac{L}{8} \frac{P}{4}, 0}_{\text{Symmetrisk!}}$$



Kontroller: Diskontinuiteter (hopp, blå pilar) motsvarande Punktkrafter, enheter rätt, bra.

Svar: Diagrammen blir enligt figurer ovan. Punktkrafterna ger styckvis konstanta/linjära lösningar för V och M .