# Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

**OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.**

**Tid och plats:** Tisdagen den 5 januari 2021 klockan 14.00-17.00, **hemtenta**.
**Hjälpmedel**: Alla hjälpmedel tillåtna
**Examinator**: Ulf Gran
**Jour**: Ulf Gran, går att nå via chatten på Zoom. **Det går även bra att ställa privata frågor på Piazza, som jag gör om till anonyma public när jag besvarat dem. Kolla därför gärna på Piazza innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

**Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder.** Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

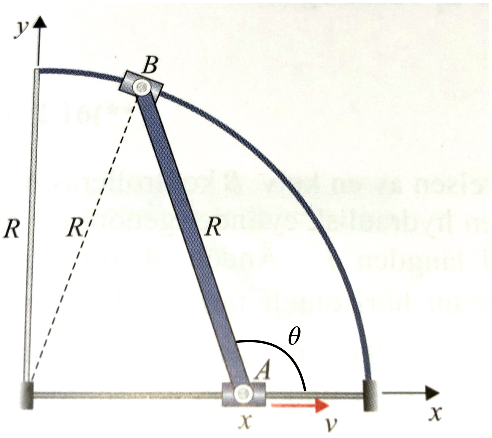
**Betygsgränser**: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

**Rättningsgranskning**: Via Zoom, tid meddelas senare via Canvas.

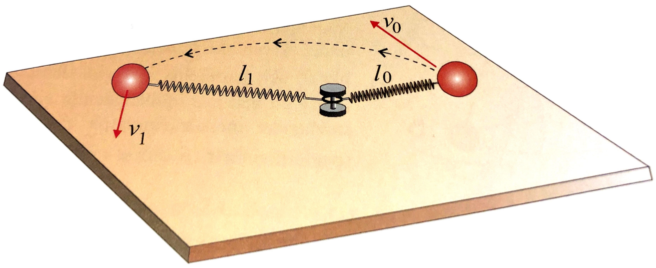
*Uppgifter*

**OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen $g$, om inget annat sägs i uppgiftstexten.**

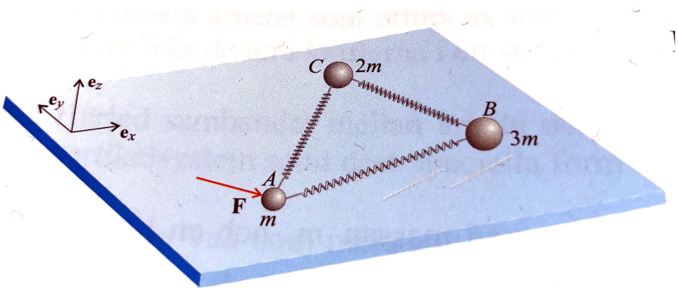
1. En kolv $A$ glider längs en horisontell stång med en konstant fart $v$. Kolven är genom en länk $AB$ med längden $R$ förenad med en annan kolv $B$ som i sin tur glider längs ett cirkelformat spår med radien $R$. Bestäm vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ uttryckt i $v$, $R$ och $x$.




2. En partikel med massan $m$ rör sig på en glatt horisontell yta. Partikeln är fäst i en lätt fjäder med fjäderkonstanten $k$ och den ospända längden $l_0$. Fjädern är ospänd från början och partikeln ges en horisontell hastighet $v_0$ i en riktning vinkelrätt mot fjädern. Bestäm denna hastighet om den maximala längden av fjädern under rörelsen är $l_1 = 2l_0$. Svara i termer av $l_0$, $k$ och $m$.




3. Betrakta tre partiklar $A$, $B$ och $C$ med massorna $m$, $3m$ respektive $2m$, och hastigheterna $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ respektive $\mathbf{v}_C$. Partiklarna är förenade med tre lätta fjädrar och är från början i vila på ett glatt horisontellt underlag då en konstant kraft $\mathbf{F}$ i horisontalplanet börjar appliceras på partikel $A$ vid tiden $t_0$. Man märker att vid ett visst senare ögonblick $t_1$ är $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}$. Bestäm $\mathbf{v}_C$ i detta ögonblick.




*Lycka till!*

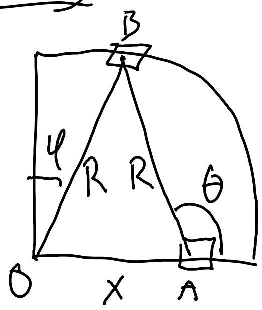
1

Sökt: vinkelhastighet $\dot{\theta}$ som funktion av $x$

Givet: Längder $R$, fart $v$.

Plan: Tvång

Lösning: Vi uttrycker $\vec{r}_A = x\hat{\imath}$ och $\vec{r}_B = R\sin\varphi\,\hat{\imath} + R\cos\varphi\,\hat{\jmath}$




Tvång: $|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = R$

$$\Rightarrow R^2 = (x - R\sin\varphi)^2 + (-R\cos\varphi)^2$$

$$= x^2 - 2Rx\sin\varphi + R^2$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 - 2Rx\sin\varphi$$

Derivera m.a.p. tid $\quad (x = x(t),\ \varphi = \varphi(t))$

$$\Rightarrow 0 = 2x\dot{x} - 2R\dot{x}\sin\varphi - 2Rx\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

likbent triangel OAB innebär att $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\theta}$.

Ur geometrin får vi ytterligare att $R\sin\varphi = \frac{x}{2}$ och $R\cos\varphi = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow 0 = 2x\dot{x} - 2\dot{x}\frac{x}{2} - 2x\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\dot{\theta}$$

$(\dot{x} = v)$

$$\Rightarrow 2x\dot{\theta}\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = 2xv - vx$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{2} \Big/ \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Division/roten ur $\leq 0$?

Kontroller: Enhet: $[\dot{\theta}] = \frac{m/s}{\sqrt{m^2}} = 1/s$, bra

Proportionell mot v, bra

Minskar med större R, bra

Vad händer när $\frac{x}{2} \to R$? Då är B på x-axeln och på väg rakt ner, d.v.s. "hur snabbt måste B röra sig i y-led för att röra sig lite i x-led?" väldigt snabbt :)

Också ~~ett~~ tydligt slutläge, så $R^2 < \frac{x^2}{4}$ aldrig ett problem.

Svar: Vinkelhastigheten för länken blir

$$\dot{\theta} = \frac{v}{2} \Big/ \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \qquad \text{(i positiv riktning)}$$

2

Sökt: farten $v_0$ i punkten $l_0$
Givet: längd $l_0$, fjäderkonstant $k$, massa $m$.
Plan: Energi och RMM-bevaring.
Lösning: Energin i systemet är bevarad då den onda kraft som utför arbete är fjäderkraften, vilken är konservativ.
Rörelsemängdsmomentet (RMM) kring mittpunkten (O) är bevarad då den resulterande kraften på kulan (fjäderkraften) alltid har sin verkningslinje genom denna.

| Energibevaring: | Potentiell energi | Kinetisk energi |
|---|---|---|
| Läge 0 | $V_0 = 0$ | $K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ |
| Läge 1 | $V_1 = \frac{1}{2} k \underbrace{\Delta x^2}_{\text{utsträckt längd}}$ | $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ |

där $\Delta x = l_1 - l_0 = l_0$

Energin bevarad innebär att

$$V_0 + K_0 = V_1 + K_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k l_0^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad (1)$$

RMM-bevaring:

$$RMM|_0 = l_0 \cdot m v_0$$
$$RMM|_1 = l_1 \cdot m v_1$$

OBS! I båda dessa punkter är hastigheten vinkelrät mot ortsvektorn. I punkt O givet i uppgiftstext och i punkt 1 av att det är max-läge (dvs ingen "radiell" fart)

$$RMM|_0 = RMM_1$$

$$\Rightarrow l_0 m v_0 = l_1 m v_1 \ldots$$

(dvs ingen "radiell" fart)

$$\Rightarrow l_0 m v_0 = l_1 m v_1$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{l_0}{l_1} v_0 \overset{l_1 = 2l_0}{=} \frac{1}{2} v_0$$

Insatt i (1) ger oss

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k l_0^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow m v_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = k l_0^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{4}{3} \frac{k}{m} l_0^2$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{k}{m}}\, l_0$$

Kontroller: Enhet $[v_0] = 1 \cdot \frac{(kg/s^2)^{1/2}}{(kg)^{1/2}} \cdot m = m/s$, bra!

Större med större $k$, och $l_0$ (svarar mot större energier)
mindre med större $m$ (trögare) rimligt!

Svar: Farten var

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{k}{m}}\, l_0$$

3

**Sökt**: hastighet $\vec{v}_C$ i $t=t_1$

**Givet**: $\vec{F}$, $\vec{v}$, $t_1$, $m$

**Plan**: Impulslagen

**Lösning**: Den konstanta kraften $\vec{F}$ tillför under tiden $t_1 - t_0$ en impuls $\vec{I} = \vec{F}(t_1 - t_0)$

Ingen annan kraft tillför en impuls till systemet, så denna impuls omvandlas till en rörelsemängd hos kulorna.

$$\vec{F}(t_1 - t_0) = \vec{I} = \vec{p}_{tot}$$

$$= m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_0$$

$$= 4m\vec{v} + 2m\vec{v}_C$$

$$\Rightarrow 2m\vec{v}_C = \vec{F}(t_1 - t_0) - 4m\vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = \frac{\vec{F}(t_1 - t_0)}{2m} - 2\vec{v}$$

**Kontroller**: enhet: $[v_C] = \underbrace{\frac{N \cdot s}{kg}}_{N = kg\, m/s^2}$ "+" $m/s$ = $m/s$, bra!

Om $\vec{v}$ försummas så är den första termen att hela rörelsemängden hamnar hos C, bra

Om $\vec{F}$ försummas så måste C ha motsatt rörelsemängd A och B, bra

**Svar**: Hastigheten hos partikel C blir

$$\vec{v}_C = \vec{F}\frac{t_1 - t_0}{2m} - 2\vec{v}$$