Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Onsdagen den 19 augusti 2020 klockan 08.30-11.30, **hemtenta**.
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, går att nå via chatten på Zoom. **Det går även bra att ställa privata frågor på Piazza, som jag gör om till anonyma public när jag besvarat dem. Kolla därför gärna på Piazza innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

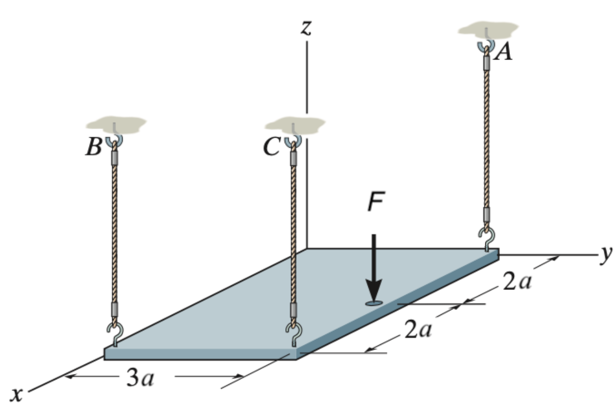
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Via Zoom, tid meddelas senare via Canvas.

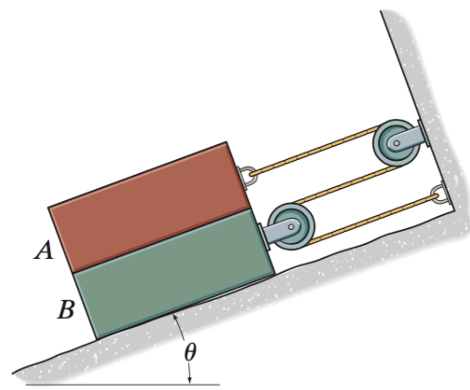
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

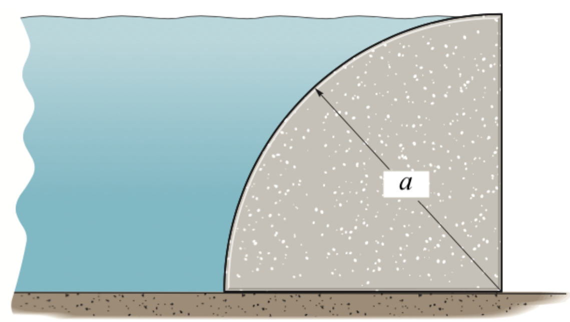
1. Den homogena plattan har massan m och belastas med en vertikal kraft F. Bestäm spänningen i de tre kablarna vid jämvikt.



2. Om den statiska friktionskoefficienten μ_s är lika för alla kontaktytor i problemet, vad blir då den lutningsvinkel θ vid vilken de två identiska blocken, varje med massan m, börjar glida?



3. Bestäm storleken på resultanten av vattentrycket per meter på betongdammen (dvs per meter i riktningen vinkelrät mot papprets/pdf:ens plan), vilken har formen av en kvartscirkel med radie a. Vattnets densitet är ρ.



Lycka till!

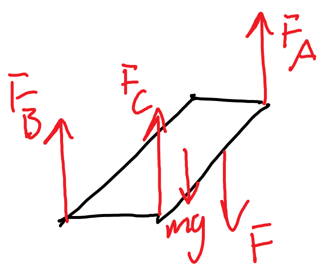
1

Sökt: Krafter i linorna (F_A, F_B, F_C)

Givet: kraft F, massa m

Plan: Frilägg + kraft- och momentjämvikt

Lösning: Vi frilägger plattan



Kraftjämvikt

$$\uparrow: \quad F_A + F_B + F_C - mg - F = 0 \qquad (1)$$

Momentjämvikt kring ... C kanske blir bra?

Vi slipper några bidrag så i alla fall

$$\rightarrow / : \quad 4aF_A - 2a\,mg - 2aF = 0 \Rightarrow F_A = \frac{F+mg}{2} \qquad (2)$$

$$\nearrow / : \quad -3aF_B + \frac{3a}{2}mg = 0 \Rightarrow F_B = \frac{mg}{2} \qquad (3)$$

Slutligen (2) och (3) insatt i (1)

$$\Rightarrow \frac{F+mg}{2} + \frac{mg}{2} + F_C - mg - F = 0 \Rightarrow F_C = \frac{F}{2}$$

Kontroller:

Enheter ok, verkar rimligt, typ $0 < F_A, F_B, F_C < F + mg$

Svar: Kraften i linorna A, B och C är

$$F_A = \frac{F+mg}{2}, \quad F_B = \frac{mg}{2} \quad \text{och} \quad F_C = \frac{F}{2} \quad \text{respektive.}$$

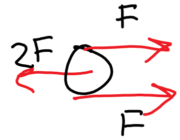
2

Sökt: vinkel $\theta = \theta_c$ för glidning

Givet: massor m, friktionskoefficient μ_c

Plan: Frilägg (var för sig obs Newton 3!), kraftjämvikt, kritiskt friktionsvillkor, Trissor

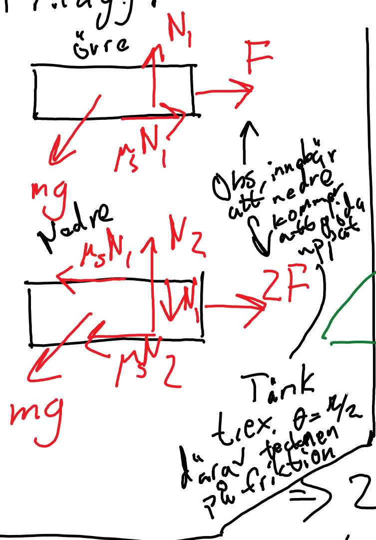
Lösning: Trissor:



Låt F vara kraften i linan.

Kritisk friktion, alltså $|F_f| = \mu_s N$. Riktningarna är viktiga!

Frilägg:



Kraftekvationer

$\uparrow: N_1 - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow N_1 = mg\cos\theta$

$\rightarrow: F + \mu_s N_1 - mg\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow F = mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$

$\uparrow: N_2 - N_1 - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow N_2 = 2mg\cos\theta$

$\rightarrow: 2F - \mu_s(N_1 + N_2) - mg\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) - \mu_s 3mg\cos\theta - mg\sin\theta = 0$

$mg\cos\theta \neq 0$

$\Rightarrow 2\tan\theta - 2\mu_s - 3\mu_s - \tan\theta = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 5\mu_s$

$\theta \in (0, \pi/2)$

$\Rightarrow \theta = \arctan 5\mu_s$

Kontroller

Enhetslöst, verkar rimligt $\theta \in (0, \pi/2)$

Svar: Blocken börjar glida vid $\theta = \arctan 5\mu_s$

3

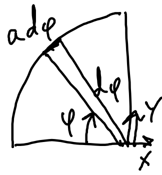
Sökt: Storlek på resultanten (per meter)

Givet: sträcka a, densitet ρ

Plan: Vätsketryck, integrera (obs, vektorer!)

Lösning: Vätsketrycket ges av $p = \rho g h$

Betrakta ett litet ytelement:



djup

Kraften blir $d\vec{F} = p\, d\vec{A} = \rho g \overbrace{(a - a\sin\varphi)}^{h} aL\, d\varphi \underbrace{(\cos\varphi\, \hat{x} - \sin\varphi\, \hat{y})}_{-\hat{r}}$

Total kraftresultant $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \int d\vec{F} = \rho g a^2 L \int_0^{\pi/2} d\varphi\, (1 - \sin\varphi)(\cos\varphi\, \hat{x} - \sin\varphi\, \hat{y})$$

$$= \rho g a^2 L \left(\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\hat{x} + \left(-1 + \tfrac{\pi}{4}\right)\hat{y} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho g a^2 L \left(\hat{x} + \left(\tfrac{\pi}{2} - 2\right)\hat{y} \right)$$

Så $$\frac{|R|}{L} = \frac{1}{2}\rho g a^2 \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{\pi}{2} - 2\right)^2} = \frac{1}{2}\rho g a^2 \sqrt{5 + \frac{\pi^2}{4} - 2\pi}$$

Kontroller: Enhet $[\rho g a^2] = \text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{N}/\text{kg} \cdot \text{m}^2 = \text{N}/\text{m}$, bra! $\quad 5 + \frac{\pi^2}{4} - 2\pi \approx 5 + \frac{9}{4} - 6 = \frac{5}{4} > 1$, bra.

Svar: Resultanten av vattentrycket på dammen blir

$$\frac{1}{2}\rho g a^2 \sqrt{5 + \frac{\pi^2}{4} - 2\pi} \quad \text{(per meter).}$$