# Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

**OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.**

**Tid och plats:** Tisdagen den 18 augusti 2020 klockan 14.00-17.00, **hemtenta**.
**Hjälpmedel**: Alla hjälpmedel tillåtna
**Examinator**: Ulf Gran
**Jour**: Ulf Gran, går att nå via chatten på Zoom. **Det går även bra att ställa privata frågor på Piazza, som jag gör om till anonyma public när jag besvarat dem. Kolla därför gärna på Piazza innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

**Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder.** Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

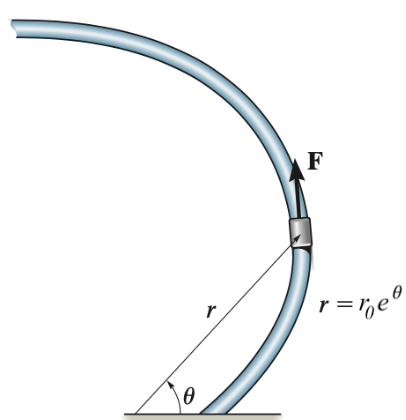
**Betygsgränser**: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

**Rättningsgranskning**: Via Zoom, tid meddelas senare via Canvas.

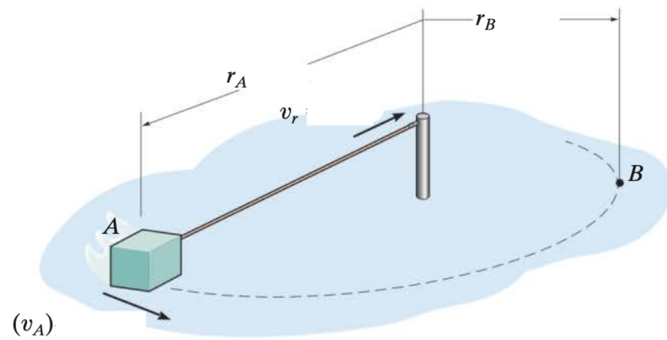
*Uppgifter*

**OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen $g$.**

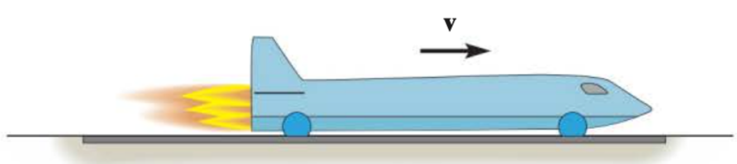
1. En ring med massan $m$ glider friktionsfritt längs en krökt stav i ett horisontellt plan. Stavens form ges av ekvationen $r = r_0 e^{\theta}$, där $r_0$ är en konstant med dimension längd och vinkeln $\theta$ mäts i radianer. Bestäm den tangentiella kraften $F$, och normalkraften $N$, som verkar på ringen om kraften $F$ är sådan att den ger upphov till en konstant vinkelhastighet $\dot{\theta}$. Svara i termer av $m$, $\theta$ och $\dot{\theta}$.



2. En låda med massan $m$ rör sig längs en cirkelbana med radien $r_A$ och med en hastighet $v_A$. Då lådan passerar punkten $A$ börjar repet dras in och ger lådan en (konstant) radiell acceleration så att lådan har den radiella hastigheten $v_r$ i punken $B$. Bestäm lådans *fart* då radien minskat till $r_B$. Bestäm även det arbete som utförs genom att dra in repet mellan position $A$ och $B$ för lådan. Försumma friktion och lådans utsträckning.




3. En raketbil med massan $M$ (då den är tom) bär bränsle med massan $m$. Bränsle förbrukas med en konstant hastighet $r$ (kg/s) och skickas ut med en hastighet $u$ relativt raketbilen. Bestäm den maximala hastigheten raketbilen uppnår om den startar från vila och friktionskraften från luftmotståndet ges av $F = -\alpha v^2$, där $\alpha$ är en konstant och $v$ är raketbilens hastighet. Bortse från övrig friktion. **Ledning 1**: För att lösa en av integralerna kan ni behöva formelsamling. **Ledning 2**: Notera att $\text{Log}[(1+a)/(1-a)] = 2\text{ArcTanh}(\text{a})$.




*Lycka till!*

1

Sökt: F och N

Givet: $m, \theta, \dot{\theta}$

Plan: NII + derivera fram acceleration

Lösning: $\vec{r} = r_0 e^{\theta}(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) = r\,\hat{r}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\theta} r_0 e^{\theta}(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) + r_0 e^{\theta}\,\dot{\theta}(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}) = \dot{\theta} r\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\theta}^2 r_0 e^{\theta}(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) + \dot{\theta} r_0 e^{\theta}\,\dot{\theta}(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y})$$

$$+\dot{\theta} r_0 e^{\theta}\dot{\theta}(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}) + r_0 e^{\theta}\dot{\theta}^2(-\cos\theta\,\hat{x} - \sin\theta\,\hat{y})$$

$$= 2\dot{\theta}^2 r_0 e^{\theta}(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}) = 2\dot{\theta}^2 r_0 e^{\theta}\hat{\theta}$$

$$\hat{t} = \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + \hat{\theta})$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{r} + \hat{\theta}) \qquad \text{(inåt)}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 2\dot{\theta}^2 r_0 e^{\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{t} + \hat{n})$$

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow F\hat{t} + N\hat{n} = \sqrt{2}\,m\dot{\theta}^2 r_0 e^{\theta}(\hat{t} + \hat{n})$$

Så $F = \sqrt{2}\,m\dot{\theta}^2 r_0 e^{\theta}$

och $N = \sqrt{2}\,m\dot{\theta}^2 r_0 e^{\theta}$

Kontroller: enhet $[m\dot{\theta}^2 r_0] = kg \cdot 1/s^2 \cdot m = kgm/s^2 = N$, bra

Något större än centralrörelse, rimligt?

Svar: I tangentiell led blir kraften

$$F = \sqrt{2}\,m\dot{\theta}^2 r_0 e^{\theta} \quad \text{(enligt figur)}$$

och normalkraften blir

$N = \sqrt{2}\, m \dot{\theta} r_0 e^{\theta}$ (inåt).

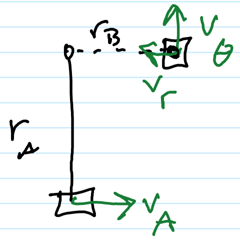
2

Sökt: fart i B $|v_B|$, arbete $W_{AB}$

Givet: $m, r_A, r_B, v_A, v_r$

Plan: RMM (bevarad), Energiprincipen (arbete)

Lösning:




Rörelsemängdsmoment i A (kring centrum)

$H_A = m r_A v_A$.

RMM i B

$H_B = m r_B v_\theta$ ← komponenten i vinkelled

(notera att radiell hastighet inte påverkar RMM)

Energi i A

$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2$

Energi i B

$E_B = \frac{1}{2} m v_\theta^2 + \frac{1}{2} m v_r^2$

Kraften i linan uträttar ett arbete, men påverkar inte RMM (tillför inget moment kring centrum som verkningslinjen går genom)

RMM bevarat $\Rightarrow H_A = H_B \Rightarrow v_\theta = v_A \frac{r_A}{r_B}$ (1)

Farten i B ges av $|v_B| = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} = \sqrt{\left(v_A \frac{r_A}{r_B}\right)^2 + v_r^2}$

Arbete uträttat*:

$$W_{AB} = E_B - E_A = \frac{1}{2} m \left(v_\theta^2 + v_r^2 - v_A^2\right) = \underline{\frac{1}{2} m v_A^2 \left(\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 - 1\right) + \frac{1}{2} m v_r^2}$$

Kontroller: enhet $\left[v_A \frac{r_B}{r_A}\right] = \text{m/s} \frac{\text{m}}{\text{m}} = \text{m/s}$, bra

$\left[m v^2\right] = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{J}$, bra

$v_\theta > v_A$, bra

$W_{AB} > 0$, d.v.s. tillför energi, bra

Svar: Farten i B blir

$$|v_B| = \sqrt{\left(v_A \frac{r_A}{r_B}\right)^2 + v_r^2}$$

och det uträttade arbetet blir

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_A^2 \left(\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 - 1\right) + \frac{1}{2} m v_r^2 \quad \text{(tillförd energi).}$$

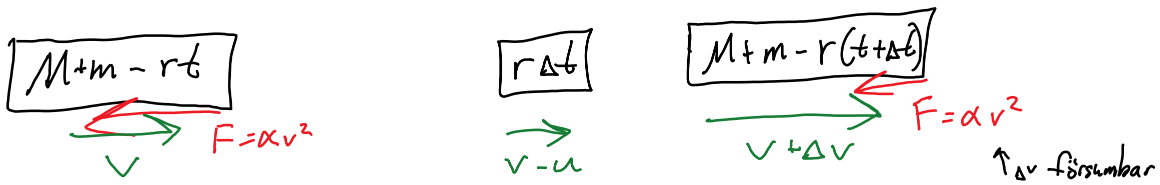
3

**Sökt**: maximal hastighet $v_{max}$

**Givet**: $M, m, r, u, \alpha$

**Plan**: Betrakta rördsemängd vid $t$ och $t+\Delta t$, ställ upp diff.ekv. och lös. maximera.

**Lösning**: Vid tidpunkt $t$ Vid tidpunkt $t+\Delta t$




$$P_t = (M+m-rt)v \qquad P_{t+\Delta t} = (M+m-r(t+\Delta t))(v+\Delta v) + r\Delta t(v-u)$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{(M+m-rt)\Delta v - r\Delta t\, u}{\Delta t} \Rightarrow \frac{dP}{dt} = (M+m-rt)\frac{dv}{dt} - ru$$

$$F_{tot} = \frac{dP}{dt} \Rightarrow -\alpha v^2 = (M+m-rt)\frac{dv}{dt} - ru$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{M+m-rt} = \frac{dv}{ru-\alpha v^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{t'} \frac{dt}{M+m-rt} = \int_0^{v'} \frac{dv}{ru-\alpha v^2}$$

start i vila vid $t=0$

V.L. integralen är enkel, $\left[-\frac{1}{r}\log(M+m-rt)\right]_0^{t'} = \frac{1}{r}\log\left(\frac{M+m}{M+m-rt'}\right)$

H.L. är lite knixigare. använd tabell (BETA 7.4, 62) eller partialbråksuppdela

$$\frac{1}{ru-\alpha v^2} = \frac{1}{\sqrt{ru}+\sqrt{\alpha}v}\,\frac{1}{\sqrt{ru}-\sqrt{\alpha}v} = \frac{1}{2\sqrt{ru}}\left(\frac{1}{\sqrt{ru}+\sqrt{\alpha}v} + \frac{1}{\sqrt{ru}-\sqrt{\alpha}v}\right)$$

vilket integrerar till

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{ru\alpha}}\log\left(\frac{\sqrt{ru}+\sqrt{\alpha}\,v}{\sqrt{ru}-\sqrt{\alpha}\,v}\right)\right]_0^{v'} = \frac{1}{2\sqrt{ru\alpha}}\log\left(\frac{\sqrt{ru}+\sqrt{\alpha}\,v'}{\sqrt{ru}-\sqrt{\alpha}\,v'}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ru\alpha}}\,\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{\frac{\alpha}{ru}}\,v'}{1-\sqrt{\frac{\alpha}{ru}}\,v'}\right) \overset{\text{lösning\#2}}{=} \frac{1}{\sqrt{ru\alpha}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{ru}}\,v'\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\log\frac{M+m}{M+m-rt'} = \frac{1}{\sqrt{ru\alpha}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{ru}}\,v'\right)$$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{\frac{ru}{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\frac{u\alpha}{r}}\log\frac{M+m}{M+m-rt'}\right)$$

Från uttrycket är det tydligt att $v'$ ökar med $t'$, så $v_{max}$ fås för $t'=t_{max}=m/r$, när allt bränsle använts (rimligt)

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{ru}{\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\frac{u\alpha}{r}}\log\frac{M+m}{M}\right)$$

Kontroller: Enhet: $\left[\left(\frac{ru}{\alpha}\right)^{1/2}\right]\left[\tanh\left(\sqrt{\frac{u\alpha}{r}}\log\frac{M+m}{M}\right)\right] = \underbrace{\left(\frac{kg/s \quad m/s}{kg/m}\right)^{1/2}}_{= m/s,\ \text{bra}}\tanh\Big(\underbrace{\frac{m/s\cdot kg/m}{kg/s}}_{=1,\ \text{bra}}\cdot 1\Big)$

Ökar med ökande $m$, bra!

Ökar med ökande $u$, bra!

Minskar med ökande $M$, bra!

$\to 0$ då $m\to 0$, bra!

$\to 0$ då $u\to 0$, bra!

Ökar med ökande $r$, bra! ($x\tanh x^{-1}$ växande)

Minskar med ökande $\alpha$, bra! ($x^{-1}\tanh x$ avtagande)

Tanh $\to 1$ för stora argument

$\Rightarrow v_{max} \to \sqrt{\frac{ru}{\alpha}}$ , vilket motsvarar att det accelerande bidraget $ru$, helt kancelleras av luftmotståndet $\alpha v_{max}^2$, bra!

Svar: Den maximala hastigheten blir

$$v_{max} = \sqrt{\frac{ru}{\alpha}} \tanh\left(\sqrt{\frac{u\alpha}{r}} \log \frac{M+m}{M}\right)$$