

Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Torsdagen den 19 mars 2020 klockan 08.30-11.30, **hemtenta**.

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna

Examinator: Ulf Gran

Jour: Ulf Gran, går att nå på tel. 031-772 3182 under tentamenstiden. **Det går även bra att ställa privata frågor på Piazza, som jag gör om till anonyma public när jag besvarat dem. Kolla därför gärna på Piazza innan ni ställer frågor ifall de redan besvarats.**

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

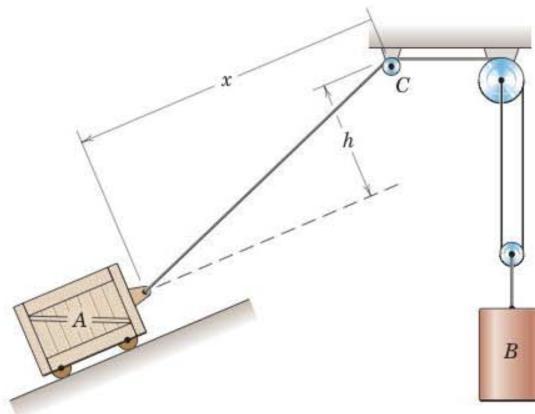
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Meddelas via Canvas, oklart hur detta ska gå till för hemtentamen.

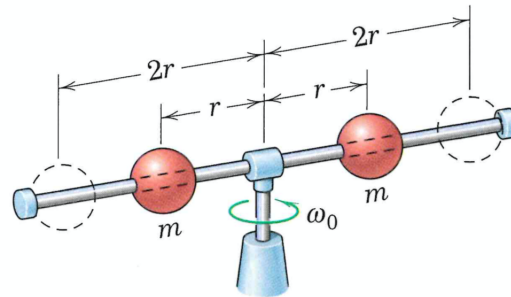
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g .

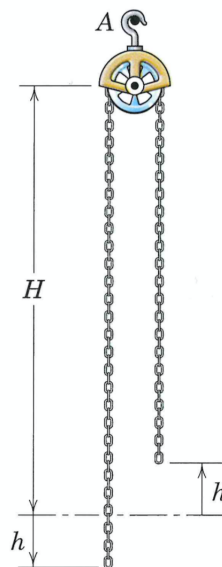
1. Härled ett uttryck för hastigheten v_A hos vagnen A i termer av hastigheten v_B hos vikten B . Låt hastigheten v_A vara positiv nedför backen, och hastigheten v_B vara positiv uppåt.



2. Två klot med massan m kan glida fritt längs en horisontellt roterande stav. I startläget är kloten fastsatta på avståndet r från rotationens centrum, och rotationen sker med vinkelhastigheten ω_0 . Sedan frigörs kloten, och glider (fritt) till slutläget, på avståndet $2r$ till rotationscentrum, enligt figuren. Beräkna vinkelfrekvensen ω efter det att kloten nått slutpositionen, samt beräkna hur stor andel av den initiala kinetiska energin som gått förlorad. Kloten kan betraktas som punktformiga.



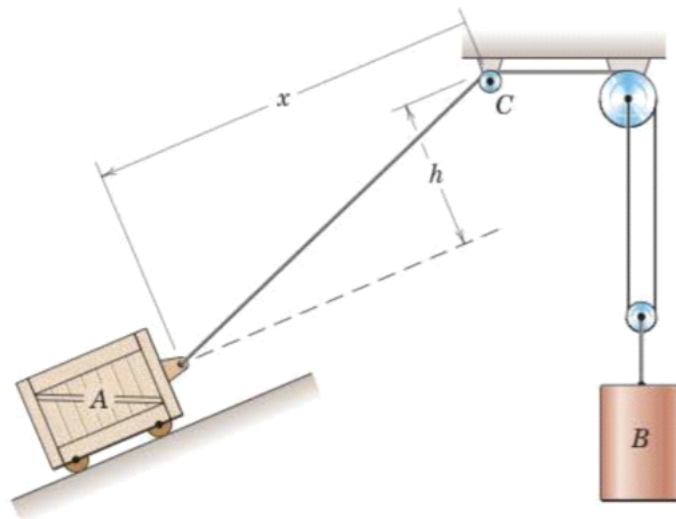
3. En kedja med massan ρ per längdenhet passerar över en liten friktionsfri trissa och släpps från vila med endast en liten obalans h för att sätta igång rörelsen (dvs h mycket nära 0 till att börja med). Bestäm accelerationen a och hastigheten v hos kedjan och kraften R på kroken från upphängningen vid punkten A, allt som funktioner av h , där h går från mycket nära noll till H . Bortse från vikten hos trissan inklusive upphängningsanordningen (inkl kroken), samt vikten hos den lilla delen av kedjan som ligger på den övre halvcirkeln av trissan.



Lycka till!

1

Härled ett uttryck för hastigheten v_A hos vagnen A i termer av hastigheten v_B hos vikten B . Låt hastigheten v_A vara positiv nedför backen, och hastigheten v_B vara positiv uppåt.



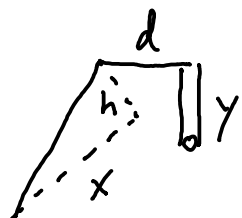
Sökt: $v_A(v_B)$

Givet: h, x .

Plan: Trängsvillkor – derivera

Lösning:

Inför sträckorna d och y enligt figur.



Längden på linan,

$$L = \sqrt{x^2 + h^2} + d + 2y,$$

måste vara konstant. Derivering m.a.p. tid ger:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \dot{x} + 0 + 2\dot{y}$$

Hastigheten v_A positiv nedför backen $\Rightarrow v_A = \dot{x}$.

Hastigheten v_B positiv uppåt $\Rightarrow v_B = -\dot{y}$.
 $\uparrow$ $\frac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} v_A - 2v_B$$

$$\Rightarrow v_A = 2v_B \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}$$

$$\left[\frac{m}{s} \right] \frac{\left[\frac{m}{s} \right]}{\left[\frac{m}{s} \right]}, \text{ ok!}$$

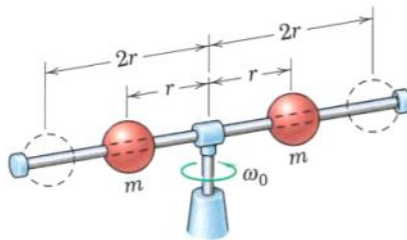
Kontroller: Om A rör sig nedåt så rör sig B uppåt, bra
 $\approx 2v_B$ för små h , bra
större för stora h , rimligt

Svar: Hastigheten hos vagnen nedför backen blir

$$v_A = 2v_B \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}.$$

2

Två klot med massan m kan glida fritt längs en horisontellt roterande stav. I startläget är kloten festsatta på avståndet r från rotationens centrum, och rotationen sker med vinkelhastigheten ω_0 . Sedan frigörs kloten, och glider (fritt) till slutläget, på avståndet $2r$ till rotationscentrum, enligt figuren. Beräkna vinkelfrekvensen ω efter det att kloten nått slutpositionen, samt beräkna hur stor andel av den initiala kinetiska energin som gått förlorad. Kloten kan betraktas som punktformiga.



Sökt: ω vid $2r$, Andel energiförlust.

Givet: ω_0 , m , r

Plan: Betrakta energi (ej bevarad) och RMM (bevarad)

Lösning: Betrakta systemet av stav + klor i rotationsplanet.

Under förloppet finns inget externt moment (kring mittpunkten) och alltså kommer RMM (kring denna punkt) att vara bevarat.

$$H_{\text{före}} = 2mr^2\omega_0 \quad H_{\text{efter}} = 2m(2r)^2\omega$$

$$0 = H_{\text{före}} - H_{\text{efter}} = 2mr^2(\omega_0 - 4\omega) \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{4}\omega_0} \quad (1)$$

[1/4], bra

Nu till energin:

$$E_{\text{före}} = \frac{1}{2} 2m(r\omega_0)^2 \quad E_{\text{efter}} = \frac{1}{2} 2m(2r\omega)^2 \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4} m(r\omega_0)^2$$

$\uparrow$ nob. ingen radiell hastighet $\uparrow$ nob. ingen radiell hastighet

Andel energi kvar:

$$\frac{E_{\text{efter}}}{E_{\text{före}}} = \frac{\frac{1}{4} m(r\omega_0)^2}{m(r\omega_0)^2} = \frac{1}{4}$$

Andel energi förlorad

$$\frac{E_{\text{före}} - E_{\text{efter}}}{E_{\text{före}}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad [1], \text{ enhetslöst, bra.}$$

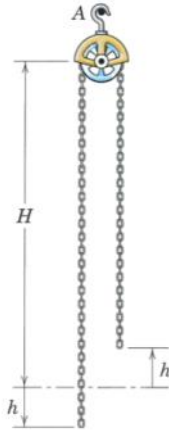
Kontroller: Rimliga, relativt enkla svar med huvudsakligen faktorer 2, 2^2 annorlunda.

Svar: Vinkelfrekvensen vid slutläget blir

$\omega = \frac{1}{4}\omega_0$, och $\frac{3}{4}$ av den initiala kinetiska energin har då förlorats.

3

En kedja med massan ρ per längdenhet passerar över en liten friktionsfri trissa och släpps från vila med endast en liten obalans h för att sätta igång rörelsen (dvs h mycket nära 0 till att börja med). Bestäm accelerationen a och hastigheten v hos kedjan och kraften R på kroken från upphängningen vid punkten A , allt som funktioner av h , där h går från mycket nära noll till H . Bortse från vikten hos trissan inklusive upphängningsanordningen (inkl kroken), samt vikten hos den lilla delen av kedjan som ligger på den övre halvcirkeln av trissan.



Sökt: acceleration a , hastighet v och reaktionskraft R .

Givet: ρ, H, h

Plan: Det finns många sätt att lösa problemet. Vi vill

- 1) Hitta a eller v , t.ex genom att frilägga <något> vid $t+\Delta t$ och kolla på rörelsemängdsförändring, alt. bara energiprincipen.
- 2) Lös för den andra av a och v genom $v dv = a ds$, integrera/derivera
- 3) Hitta R genom en (ytterligare) friläggning.

Lösning: 1) alternativ 1-friläggning (finns fler alt på friläggning)

Betrakta hela kedjans rörelsemängd i kedjans riktning

$$\begin{array}{ccc}
 t: & t+\Delta t: & \\
 \begin{array}{c} \text{2}\rho h g \\ \text{2}h \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{2}H\rho \\ \text{2}(h+\Delta h) \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{l} \Delta G = 2H\rho \Delta v \\ \Rightarrow \dot{G} = 2H\rho a \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F &= \left\{ \text{tyngdkraften från biten som bara finns till vänster} \right\} \\
 &= 2\rho h g
 \end{aligned}$$

$$\Sigma F = \dot{G} \Rightarrow 2\rho h g = 2H\rho a \Rightarrow \boxed{a = \frac{h}{H} g} \quad (1)$$

1) alternativ 2

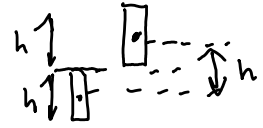
Kraften R utför inget arbete (angreppspunkten stilla)

$\Rightarrow$ Energin bevarad

$$V_{\text{start}} = 0, \quad T_{\text{start}} = 0$$

$$V_{\text{efter}} = \underbrace{-\rho h}_{m} g h$$

$$T_{\text{efter}} = \frac{1}{2} \underbrace{2H\rho}_{M} v^2$$



$$V_{\text{start}} + T_{\text{start}} = V_{\text{efter}} + T_{\text{efter}}$$

$$0 = -\rho g h^2 + \rho H v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{g}{H}} h}$$

2) från a till v

$$v dv = a dh'$$

$$\int_0^v v' dv' = \int_0^h \frac{h'}{H} g dh'$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{H} \frac{h^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{g}{H}} h} \quad (2)$$

2) från v till a

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{dh}{dt}$$

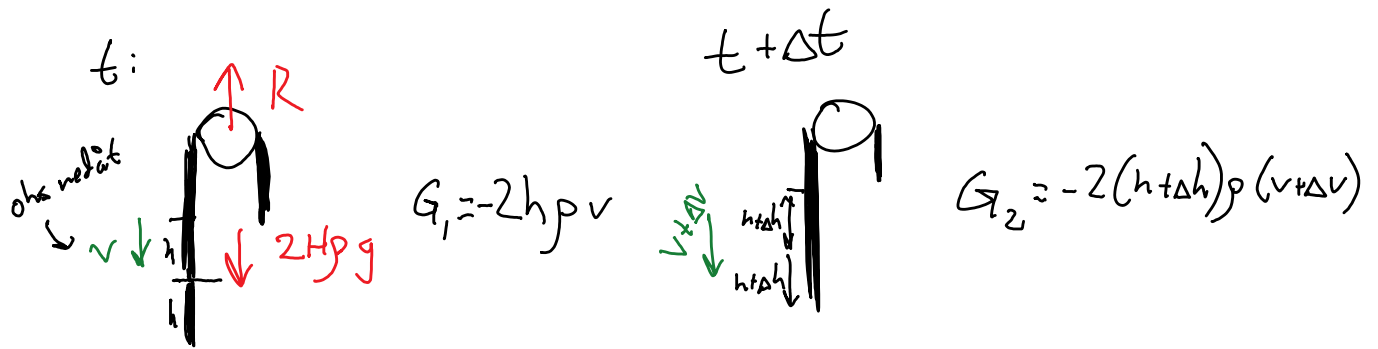
$$= \sqrt{\frac{g}{H}} v$$

$$= \sqrt{\frac{g}{H}} \sqrt{\frac{g}{H}} h$$

$$\boxed{= \frac{g}{H} h}$$

Obs iakttag viss försiktighet med tecken, v och a är här åt vänster/nedåt!

3) Frilägg hela kedjan (finns givetvis fler friläggningar möjliga även här)



$$\Delta G = G_2 - G_1 = -2(h + \Delta h)\rho(v + \Delta v) + 2h\rho v$$

$$= -2h\rho\Delta v - 2\Delta h\rho v - 2\Delta h\rho\Delta v$$

$$\frac{\Delta G}{\Delta t} = -2\rho \left(h \frac{\Delta v}{\Delta t} + v \frac{\Delta h}{\Delta t} + \frac{\Delta h \Delta v}{2} \right)$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\Delta G}{\Delta t} \Big|_{\Delta \rightarrow 0} = -2\rho(ha + v^2 + 0) \quad \downarrow \frac{O(\Delta^2)}{\Delta} \rightarrow 0$$

$$\Sigma F = R - 2H\rho g \quad (\text{från friläggning})$$

Kraftbeaktningen:

$$\Sigma F = \dot{G}$$

$$\Rightarrow R - 2H\rho g = -2\rho(ha + v^2)$$

$$R = 2H\rho g - 2\rho(ha + v^2) \quad \leftarrow \text{sätter in resultaten (1) och (2)}$$

$$= 2\rho g H \left(1 - 2 \frac{h^2}{H^2} \right)$$

$$[N][1], \text{ bra}$$

Kontroller: $\approx 2\rho g H$ för $h \ll H$ är bra, väntat.

Mindre kraft desto mer kedjan faller, rimligt.

Notera att det händer något ointuitivt vid $h = H/\sqrt{2}$.

Efter den punkten blir R negativ, dvs anordningen behöver trycka nedåt för att hålla nere kedjan.

Lite lustigt att kedjan i toppen "vill" uppåt men detta är något som faktiskt händer tack vare den spännande faktorn två.

Video på hemsidan?

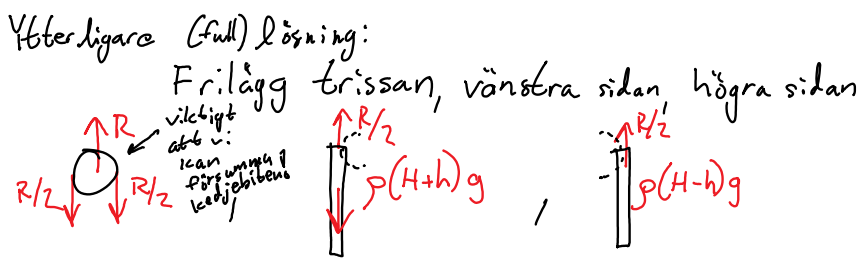
Svar: Hastigheten blir $v = \sqrt{\frac{g}{H}} h$ nedåt,

accelerationen blir $a = \frac{h}{H} g$ nedåt,

och reaktionskraften R blir

$$R = 2pgH\left(1 - 2\frac{h^2}{H^2}\right) \text{ uppåt .}$$

Ytterligare (full) lösning:



Jämför rörelsemängd vid t och $t+\Delta t$

t :

$t+\Delta t$:

$$V: \rho(H-h)v$$

$$\rho(H-h-\Delta h)(v+\Delta v)$$

$$H: -\rho(H+h)v$$

$$-\rho(H+h+\Delta h)(v+\Delta v)$$

$$\Delta P_V = \rho(H-h)\Delta v - \rho\Delta h v + \Delta^2 \Rightarrow \dot{P}_V = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta P_V}{\Delta t} = \rho(H-h)a - \rho v^2 = \frac{R}{2} - \rho(H-h)g \quad (1)$$

$$\Delta P_H = -\rho(H+h)\Delta v - \rho\Delta h v + \Delta^2 \Rightarrow \dot{P}_H = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta P_H}{\Delta t} = -\rho(H+h)a - \rho v^2 = \frac{R}{2} - \rho(H+h)g$$

$$\Rightarrow 2\rho H a = 2\rho h g \Rightarrow a = \frac{g}{H} h$$

$$v dv = a dh \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{H} h^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{H}} h$$

Integrera

Sätt in i (1), lös ut R

$$\Rightarrow R = 2\rho g \left(H - 2 \frac{h^2}{g} \right)$$