Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Onsdagen den 8 januari 2020 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Marcus Tornsö, tel. 070-4376483, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

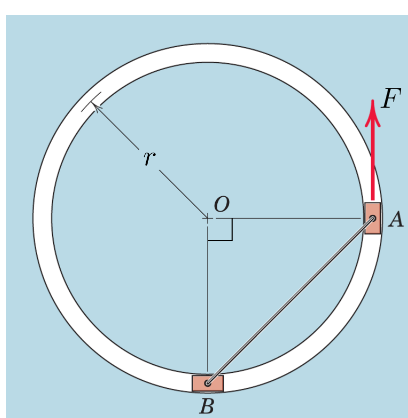
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredagen 31 januari, kl 12.30-13.00 i FL61.

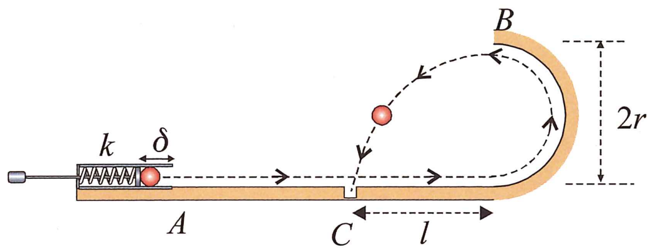
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

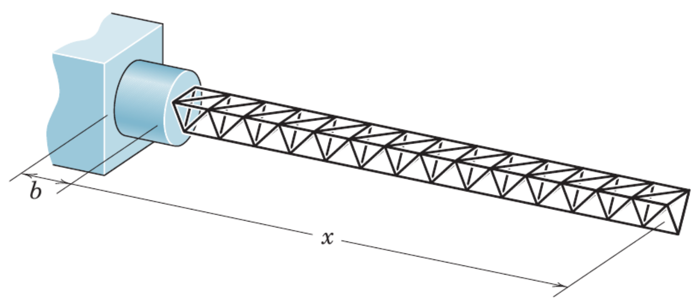
1. Två vagnar, A och B, med samma massa m rör sig friktionslöst längs ett cirkulärt spår, med radien r, i ett horisontellt plan. Bestäm accelerationen för varje vagn, och normalkraften från spåret på varje vagn, just efter start då systemet startar från vila i angiven position och kraften F verkar tangentiellt mot det cirkulära spåret på vagn A. Bestäm även spännkraften i (den otöjbara och masslösa) tråden som binder samman vagnarna.



2. Avståndet l till hålet C är anpassat så att partikeln med massan m landar i C om den har den minsta hastighet som krävs för att den ska nå punkten B längs den halvcirkelformade banan med radien r. Bestäm hoptryckningen δ av fjädern vid A, vars fjäderkonstant är k, så att partikeln landar i C. Bestäm också avståndet l.



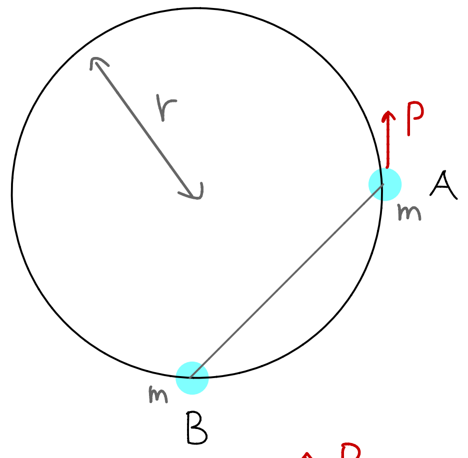
3. En bom till en bit av en rymdstation transporteras under uppskjutning ihopfäld i en behållare. I omloppsbana fälls den sedan ut. Beräkna storleken på kraften med vilken infästningen verkar på bomen då bommen har fälts ut en sträcka x. Svara i termer av bommens densitet (massa per längdenhet) ρ, $\dot{x}$ och $\ddot{x}$. (Antag att de bomdelar som är utanför behållaren är helt utfälda, dvs hela bommen utanför behållaren rör sig med en fart $\dot{x}$. Behandla infästningen på rymdstationen som fixerad (dvs massan hos rymdstationen antas vara mycket större än bommens massa) och bortse från gravitation.)



Lycka till!

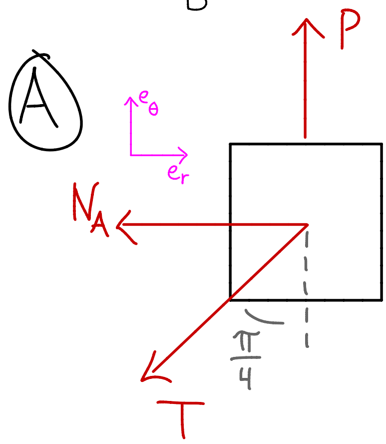
1

Sökt: Vagnarnas acceleration, normalkrafter och spännkraften i linan.
Givet: Kraften P, massan m och radien r.



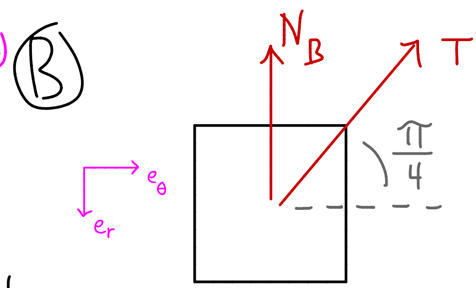
Plan: Frilägga vagnarna separat och skriva ner deras rörelseekvationer i polära koordinater.
Linan ger uppehov till ett tvång som kan uttryckas som att vinkeln mellan vagnarna är konstant.

$$\theta_A = \theta_B + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_A = \dot{\theta}_B \equiv \dot{\theta} \\ \ddot{\theta}_A = \ddot{\theta}_B \equiv \ddot{\theta} \end{cases}$$



$$A: \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} -T\cos(\frac{\pi}{4}) + P = m r \ddot{\theta} \ (= m a_\theta) & (1) \\ -N_A - T\sin(\frac{\pi}{4}) = -m r \dot{\theta}^2 \ (= m a_r) & (2) \end{cases}$$

$$B: \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} -N_B - T\sin(\frac{\pi}{4}) = -m r \dot{\theta}^2 \ (= m a_r) & (3) \\ T\cos(\frac{\pi}{4}) = m r \ddot{\theta} \ (= m a_\theta) & (4) \end{cases}$$



$$(4) - (1) \Leftrightarrow 2T\cos(\tfrac{\pi}{4}) - P = 0 \Leftrightarrow T = \frac{1}{\sqrt{2}} P$$

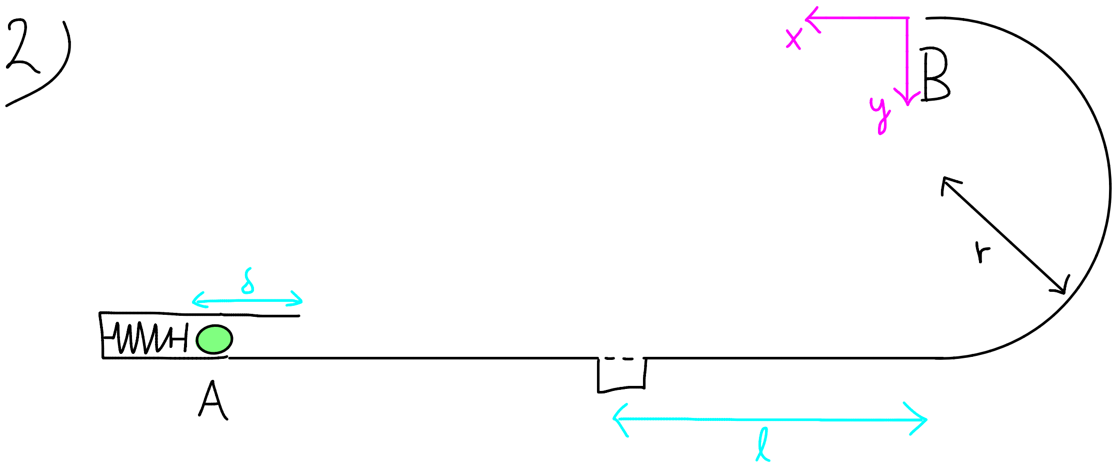
$$(2) - (3) \Rightarrow N_A = N_B \equiv N$$

I det angivna läget är vagnarna i vila så att $\dot{\theta} = 0$.

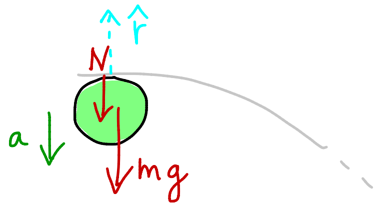
$$(1) \Rightarrow \quad N = m r \dot{\theta}^2 - T\sin(\tfrac{\pi}{4}) \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{\theta} = 0 \\ \text{vid start}}}{=} -\frac{1}{2} P$$

$$\begin{matrix} (3) \Rightarrow & a_r = 0 \\ (4) \Rightarrow & a_\theta = r\ddot{\theta} = \frac{1}{2m} P \end{matrix} \Rightarrow a = \frac{1}{2m} P e_\theta \qquad [a_\theta] = \frac{kg\,m}{s^2} / kg = \frac{m}{s^2}$$

2)



Friläggning av partikeln vid B:



När farten är precis tillräcklig för att nå B så gäller att $N=0$. Eftersom partikeln rör sig i en cirkelbana fram till B ges accelerationen av $a = -a_r = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{r}$.

Rörelseekvationen i $\hat{r}$-led är därför

$$-mg = -m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = +\sqrt{rg}$$ i x-led, vilket är hastigheten vid B.

eftersom den rör sig åt vänster

Energiprincipen ger nu att

$$\underbrace{\frac{1}{2}k\delta^2}_{V_{fjäder}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_B} + \underbrace{2rmg}_{V_B} = \frac{5}{2}rmg$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\frac{5rmg}{k}}}$$

$$[\delta] = \sqrt{\frac{m\,kg\,m/s^2}{kg/s^2}} = m$$

Från B faller partikeln med konstant acceleration

$$m\ddot{y} = mg \overset{\begin{cases} y(0)=0 \\ \dot{y}(0)=0 \end{cases}}{\Rightarrow} y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Fallet tar därför t_{fall} enligt

$$y(t_{fall}) = \frac{1}{2}gt_{fall}^2 = 2r \Rightarrow t_{fall} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

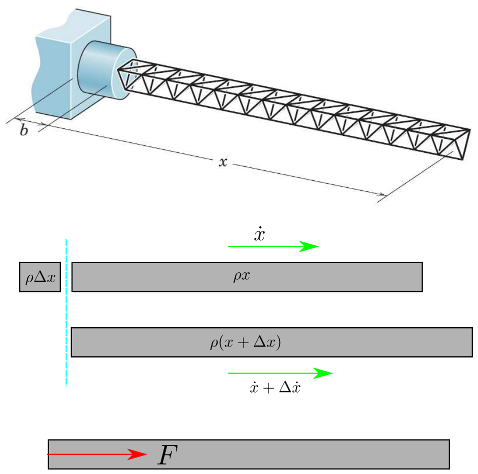
Inga krafter verkar i x-led så att

$$\ddot{x} = 0 \overset{\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=v \end{cases}}{\Rightarrow} x = vt$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_{mark}}_{\text{där partikeln landar}} = l = v \cdot t_{fall} = \sqrt{rg} \cdot 2\sqrt{\frac{r}{g}} = 2r$$

dvs $\boxed{l = 2r}$

3



Figur 1.

Vi tittar på ett system som består av bommen vid en given tidpunkt och en liten bit som precis skall fällas ut. Rörelsemängden vid t och vid $t+\Delta t$ ges av

$$
\begin{aligned}
G(t) &= \rho x\dot{x} \\
G(t+\Delta t) &= \rho(x+\Delta x)(\dot{x}+\Delta\dot{x}) \\
&= \rho x\dot{x} + \rho\Delta x\dot{x} + \rho x\Delta\dot{x}
\end{aligned}
$$

Den enda externa kraften är F så vi har

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\Delta G}{\Delta t} \\
&= \frac{\rho\Delta x\dot{x} + \rho x\Delta\dot{x}}{\Delta t} \\
&= \rho\dot{x}^2 + \rho x\ddot{x}
\end{aligned}
$$

$\left([F] = \frac{kg}{m}\frac{m^2}{s^2} + \frac{\mathrm{kg}}{m}m\frac{m}{s^2} = \frac{kgm}{s^2}\right)$