

Tentamen i Mekanik 1 (FFM515/FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift har ändrats från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Onsdagen den 21 augusti 2019 med start 08.30 i maskinsalar.

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Ulf Gran

Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 10.00 och 12.00.

OBS: Tentamen är indelad i **två delar**, del 1 och 2. Du kan välja **ett** av följande alternativ:

- Tentera hela kursen genom att lösa båda delarna av tentan under 5 timmar (sista inlämning 13.30). För att bli godkänd (på tentan och hela kursen) krävs för studenter registrerade på den nya kursen FFM516 minst 16 poäng totalt varav minst 8 poäng på varje del. För studenter registrerade på den gamla kursen FFM515 krävs endast minst 16 poäng totalt, dvs det finns inget krav på minst 8 poäng på varje del av tentan.
- Tentera en del av kursen genom att lösa en av delarna av tentan under 3 timmar (dvs med sista inlämning 11.30). För att bli godkänd på den del studenten valt att tentera krävs minst 8 poäng. Kan vara lämpligt val om man sedan tidigare är godkänd på en del av kursen.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

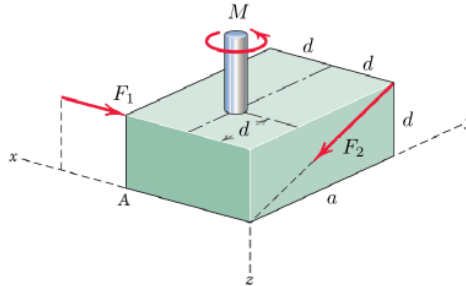
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på varje del av tentan, och maximalt 36 poäng på hela tentan. För att bli godkänd på en del av tentan krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5. För kraven att bli godkänd på båda delarna av tentan se rutan ovan. Förutsatt att man uppfyller kraven för godkänt är betygsgränserna 16-23 för betyg 3, 24-30 för betyg 4 samt 31-36 för betyg 5.

Rättningsgranskning: Onsdagen 18/9 2019 kl 12.30-13.00 i sal FL61.

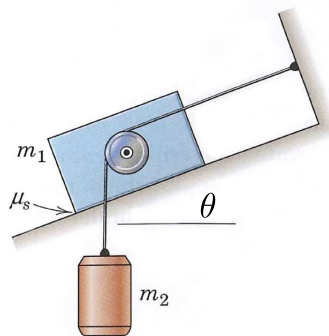
Lycka till!

Del 1

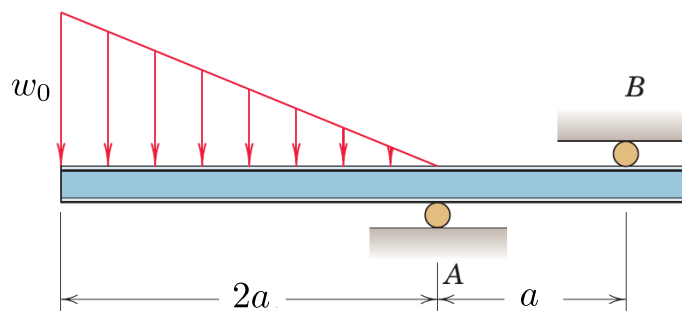
1. Ersätt de två krafterna och vridmomentet M med ett ekvivalent system vid punkten A . Svara i termer av storheter givna i figuren nedan.



2. Bestäm det intervall för massan m_2 inom vilket systemet är i jämvikt. Den statiska friktionskoefficienten mellan blocket och underlaget är μ_s . Försumma friktionen i trissan och antag (vid behov) att $0 < \theta < \pi/2$ samt att $0 < \mu_s < \frac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.



3. Rita skjuv- och momentdiagram för balken nedan och specificera skjuvkraften V och momentet M vid en punkt sträckan a till vänster om punkten A (dvs i mitten av kraftfördelningen). Balkens massa kan försummas.



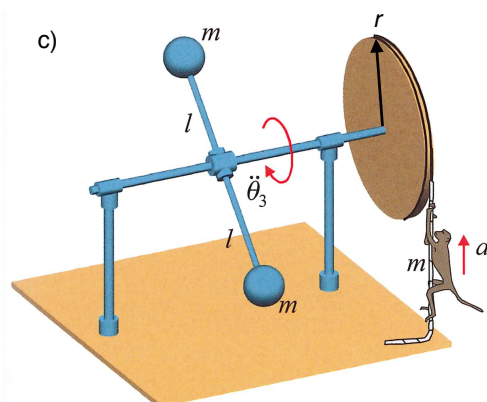
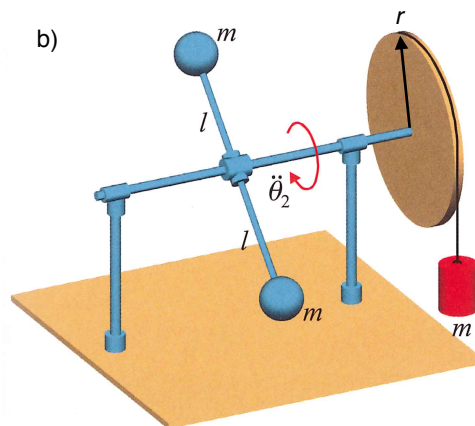
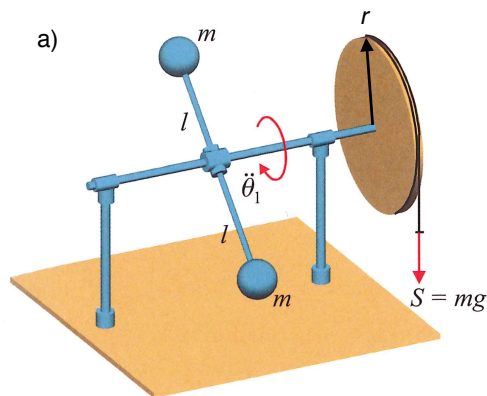
Del 2

- 4 Betrakta anordningen i figuren bestående av en masslös stång som kan rotera friktionsfritt kring en horisontell axel. En annan stång, också den masslös, är monterad vinkelrät mot den första och uppbär två likadana klot som är små (dvs kan behandlas som punktformiga), vardera med massan m enligt figuren. En vajer är lindad kring en masslös trumma med radien r som är fäst i den horisontella stängens.

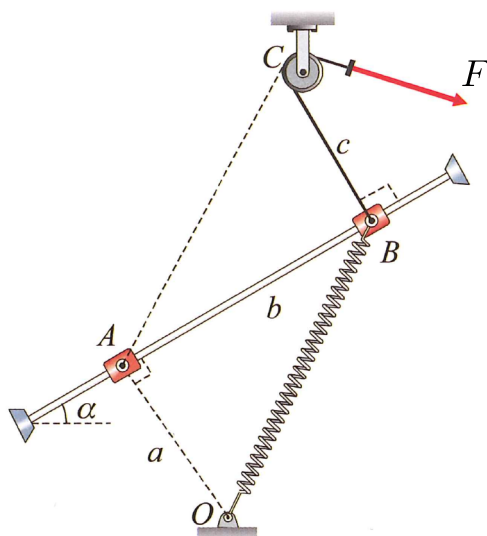
Betrakta tre olika fall enligt figurerna:

- Man drar i vajern med en dragkraft $S = mg$.
- En vikt med massan m är fäst i vajern.
- En apa med massan m klättrar uppför vajern med accelerationen a relativt marken.

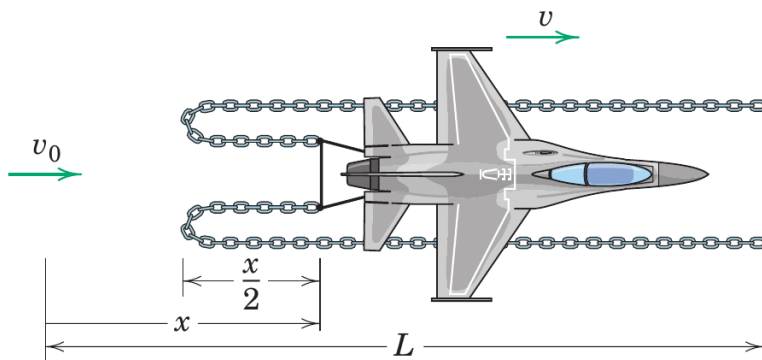
Bestäm anordningens vinkelacceleration $\ddot{\theta}$ i de tre olika fallen om avståndet från rotationsaxeln till varje klots mittpunkt är l .

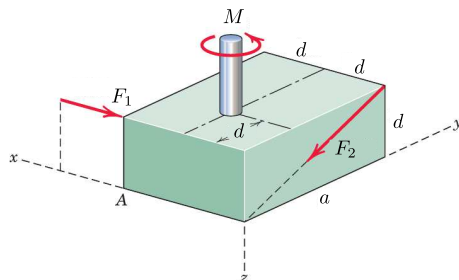


- 5 En hylsa med massan m kan glida friktionsfritt längs en stång som bildar lutningsvinkeln α med horisontalplanet. Hylsan är fäst i en masslös fjäder med fjäderkonstanten k och den ospända längden a . Andra änden av fjädern är fäst i den fixa punkten O enligt figuren. En lina är fäst i hylsan och löper genom en liten (friktionslös) trissa i punkten C . Hylsan är från början i vila i punkten A på avståndet a från O då man börjar dra i linan med en konstant kraft F enligt figuren. Bestäm hylsans fart v_B i punkten B på avståndet b från A längs stangen och på avståndet c från trissan.



- 6 Ett flygplan med massan m har precis landat på en mycket kort landningsbana och har farten v_0 . För att sakta ned flygplanet snabbt har man lagt ut två kedjor med massan ρ per längdenhet som flygplanet hakar fast i och drar med sig. Varje kedja har en total längd L . Efter en sträcka x har flygplanet dragit med sig en total längd x av kedjorna enligt figuren. Beräkna flygplanets fart efter att det har dragit med sig hela kedjan. Försumma friktion och luftmotstånd. Härled också ett uttryck för längden x som funktion av tiden efter det att flygplanet har hakat i kedjan.





Vridmomentet M är oberoende av angreppspunkt och kan därför flyttas till A utan några andra modifikationer.

Kraften F_1 ger uppehov till ett vridmoment

$$\mathbf{M}_1 = F_1 d \hat{\mathbf{y}}$$

Kraften F_2 kan vi med fördel flytta längst sin verkningslinje till origo. Vektorn $\mathbf{F}_2$ ges av

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \frac{-a\hat{\mathbf{y}} + d\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

Då ges vridmomentet som den ger uppehov till av

$$\mathbf{M}_2 = \frac{F_2}{\sqrt{a^2 + d^2}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -2d & 0 & 0 \\ 0 & -a & d \end{vmatrix}$$

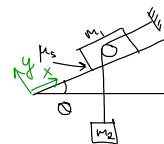
(Notera att vi kan ta ut normaliseringsfaktorn för komponenterna av $\mathbf{F}_2$ ur determinanten, varför?).

$$\mathbf{M}_2 = \frac{F_2}{\sqrt{a^2 + d^2}} (2d^2 \hat{\mathbf{y}} + 2da \hat{\mathbf{z}})$$

Den ekvivalenta kraften $\mathbf{R}_O$ och vridmomentet $\mathbf{M}_O$ ges nu av

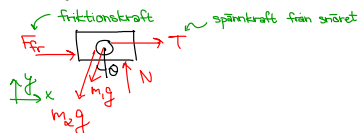
$$\begin{aligned} \mathbf{R}_O &= -F_1 \hat{\mathbf{x}} + F_2 \frac{-a\hat{\mathbf{y}} + d\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{a^2 + d^2}} \\ \mathbf{M}_O &= -M \hat{\mathbf{z}} + F_1 d \hat{\mathbf{y}} + F_2 \frac{2d^2 \hat{\mathbf{y}} + 2da \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{a^2 + d^2}} \end{aligned}$$

2. Givet: massan m_1 , vinkeln Θ och μ_s mot underlaget
(försumma friktion i trissan) Antag $0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$ samt $0 < \mu_s < \frac{1 - \sin \Theta}{\cos \Theta}$
Sökt: Intervallet för massan m_2 för vilket systemet är i vila



Lösning:

Fritägg m_1 med trissan i det utvalda koordinatsystemet.



För att trissan inte ska börja snurra krävs att

$$T = m_2 g$$

För friktionskraften gäller att

$$|F_{fr}| \leq \mu_s N, \text{ dvs } -\mu_s N \leq F_{fr} \leq \mu_s N \quad (*)$$

OBS: Om $m_2 \gg m_1$ kan det ske att m_1 -blocket glider uppför rampen varför vi måste ha med båda tecknen för F_{fr} .

Kraftjämvikt ger:

$$\begin{aligned} x: F_{fr} + T - (m_1 + m_2)g \sin \Theta &= 0 \\ y: N - (m_1 + m_2)g \cos \Theta &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{fr} = (m_1 + m_2)g \sin \Theta - m_2 g \\ N = (m_1 + m_2)g \cos \Theta \end{cases}$$

Insättning i (*) ger

$$\begin{aligned} -\mu_s (m_1 + m_2)g \cos \Theta &\leq (m_1 + m_2)g \sin \Theta - m_2 g \text{ och } (m_1 + m_2)g \sin \Theta - m_2 g \leq \mu_s (m_1 + m_2)g \cos \Theta \\ \Leftrightarrow -m_1(\mu_s \cos \Theta + \sin \Theta) &\leq m_2(\sin \Theta + \mu_s \cos \Theta - 1) \text{ och } m_2(\sin \Theta - \mu_s \cos \Theta - 1) \leq m_1(\mu_s \cos \Theta - \sin \Theta) \end{aligned}$$

Enligt antagandet:

$$0 < \Theta < \frac{\pi}{2} \text{ och } 0 < \mu_s < \frac{1 - \sin \Theta}{\cos \Theta} \Rightarrow 0 < \mu_s \cos \Theta < 1 - \sin \Theta \Rightarrow \begin{cases} \mu_s \cos \Theta - (1 - \sin \Theta) < 0 \\ -\mu_s \cos \Theta - (1 - \sin \Theta) < 0 \end{cases}$$

Dvs, de understrukna faktorerna ovan är negativa

Således byts olikhetstecknen vid division till:

$$-m_1 \frac{\mu_s \cos \Theta + \sin \Theta}{\sin \Theta + \mu_s \cos \Theta - 1} \geq m_2 \text{ och } m_2 \geq m_1 \frac{\mu_s \cos \Theta - \sin \Theta}{\sin \Theta - \mu_s \cos \Theta - 1}$$

Med positiva nämnare får vi då

$$\underline{\text{Svar:}} \quad m_1 \frac{\sin \Theta - \mu_s \cos \Theta}{1 - \sin \Theta + \mu_s \cos \Theta} \leq m_2 \leq m_1 \frac{\sin \Theta + \mu_s \cos \Theta}{1 - \sin \Theta - \mu_s \cos \Theta}$$

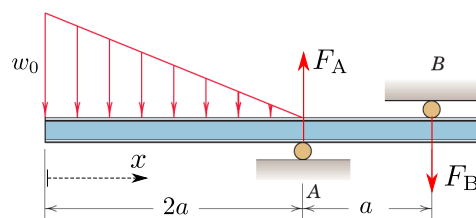
För $\mu_s > \tan \Theta$ blir $\sin \Theta - \mu_s \cos \Theta$ negativt varför man då istället bör använda noll som nedre gräns för m_2 ty massan måste vara positiv.

Kontroller:

Dim. OK!

$$\mu_s = 0 \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{\sin \Theta}{1 - \sin \Theta} \leftarrow \text{ej intervall OK!}$$

Uppgift 3



Figur 3.

Den distribuerade kraften kan i friläggningsdiagrammet för hela balken ersättas av den ekvivalenta kraften $F = \frac{1}{2}w_0 \cdot 2a = w_0a$ verkandes vid $x = \frac{2}{3}a$.

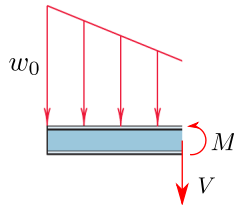
Momentjämvikt kring B ger

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{4}{3}a\right)w_0a - aF_A &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ F_A &= \frac{7}{3}aw_0\end{aligned}$$

Momentjämvikt kring A ger

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}aw_0a - aF_B &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ F_B &= \frac{4}{3}aw_0\end{aligned}$$

Friläggning av en bit till vänster om A ger för kraftjämvikt

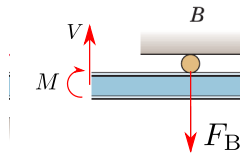


$$\begin{aligned}\int_0^x -\left(1 - \frac{s}{2a}\right)w_0 ds - V(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ V(x) &= \left(-x + \frac{x^2}{4a}\right)w_0\end{aligned}$$

Från $M'(x) = V(x)$ får vi

$$\begin{aligned}M(x) &= \int_0^x V(s) ds \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12a}\right)w_0\end{aligned}$$

Friläggning av en bit till höger om A ger direkt att



$$\begin{aligned}V(x) &= F_B = \frac{4}{3}aw_0 \\ \Rightarrow \\ M(x) &= M(2a) + \int_{2a}^x F_B ds \\ &= \left(-2a^2 + \frac{2}{3}a^2\right)w_0 + F_B(x - 2a) \\ &= -\frac{4}{3}a^2w_0 + \frac{4}{3}aw_0(x - 2a) \\ &= -\frac{12}{3}a^2w_0 + \frac{4}{3}aw_0x\end{aligned}$$

Sammanfattningvis har vi

$$V(x) = \begin{cases} \left(-x + \frac{x^2}{4a}\right)w_0 & x < 2a \\ \frac{4}{3}aw_0 & x > 2a \end{cases}$$

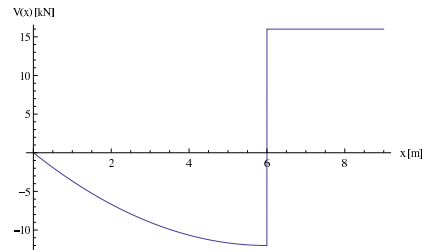
$$M(x) = \begin{cases} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12a}\right)w_0 & x < 2a \\ \left(-\frac{12}{3}a^2 + \frac{4}{3}ax\right)w_0 & x \geq 2a \end{cases}$$

Eftersom $[w_0] = \frac{\text{kraft}}{m}$ ser man att $[V(x)] = \frac{kgm}{s^2}$ och $[M(x)] = \frac{kgm^2}{s^2}$.

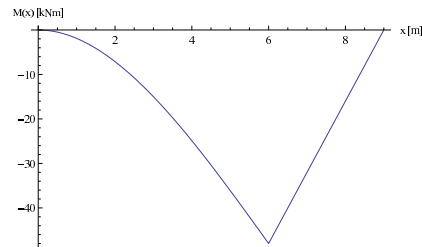
Vid punkten $x = a$ ges de av

$$V(a) = -\frac{3}{4}aw_0$$

$$M(a) = -\frac{5}{12}a^2w_0$$



Figur 4. $V(x)$ $\left\{a = 3\text{m}, w_0 = 4\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right\}$



Figur 5. $M(x)$ $\left\{a = 3\text{m}, w_0 = 4\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right\}$

$$\textcircled{c}: \quad H_A = -mvr + 2ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{H}_A = -mar + 2ml^2\ddot{\theta}$$

$$M_A = mgr$$

$$\dot{H}_A = M_A \Leftrightarrow -mar + 2ml^2\ddot{\theta} = mgr$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{(g+a)r}{2l^2}$$

I alla tre svar ges dimensionsanalysen av

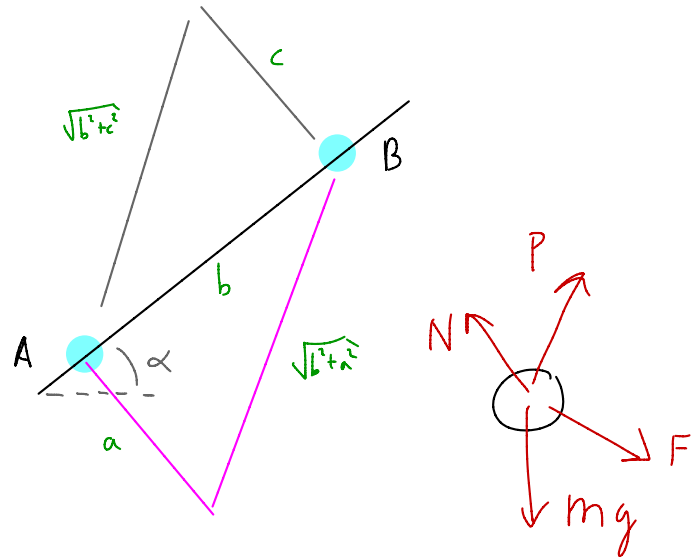
$$[\ddot{\theta}] = \frac{\frac{m}{s^2} \cdot m}{m^2} = \frac{1}{s^2}$$

5

Sökt: Hylsans fart i punkten B.

Givet: Kraften P, längderna a, b, c, fjäderkonstanten k och vinkeln α .

Plan: Använda energiprincipen.



Fjäderkraften F och tyngdkraften är båda konservativa och bidrar till totala mekaniska energin.

$$E_A = 0$$

$$E_B = mg \sin(\alpha) b + \underbrace{\frac{1}{2} k (\sqrt{b^2 + a^2} - a)}_F + \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{K_B}$$

Normalkraften verkar vinkelrätt mot rörelsen och ger därför inte uppehöv till något arbete. Kraften P utför ett arbete

$$U_{A \rightarrow B} = P (\underbrace{\sqrt{b^2 + a^2} - c})$$

Avståndet som angreppspunkten rör sig på andra sidan trissan.

Energiprincipen ger

$$E_B = E_A + U_{A \rightarrow B} \Leftrightarrow mg \sin(\alpha) b + \frac{1}{2} k (\sqrt{b^2 + a^2} - a) + \frac{mv^2}{2} = P (\sqrt{b^2 + a^2} - c)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\underbrace{\frac{2P}{m} (\sqrt{b^2 + a^2} - c)}_{\textcircled{1}} - \underbrace{2g \sin(\alpha) b}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\frac{k}{m} (\sqrt{b^2 + a^2} - a)}_{\textcircled{3}}}$$

$$[\textcircled{1}] = \frac{k_g m}{s^2 / k_g} \cdot m = \frac{m^2}{s^2} \quad [\textcircled{2}] = \frac{m}{s^2} \cdot m = \frac{m^2}{s^2} \quad [\textcircled{3}] = \frac{[kraft]}{m / k_g} \cdot m^2 = \frac{m^2}{s^2}$$

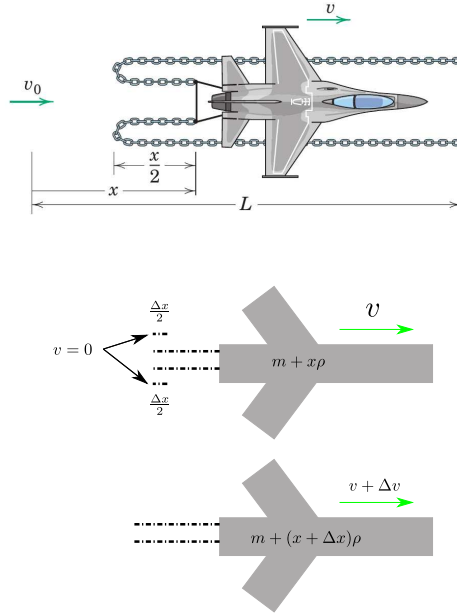


Figure 1.

Flygplanet drar iväg mer och mer kedja och mellan t och $t + \Delta t$ har rörelsemängden förändrats enligt

$$\begin{aligned} G(t) &= (m + x\rho)v \\ G(t + \Delta t) &= (m + (x + \Delta x)\rho)(v + \Delta v) \end{aligned}$$

Det verkar inga externa krafter på systemet flygplan tillsammans med kedjan som rör på sig så vi har

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Delta G}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta x \rho v + (m + x\rho)\Delta v}{\Delta t} \\ &= \rho v^2 + (m + x\rho)a \\ &\Leftrightarrow \\ a &= -\frac{\rho v^2}{m + x\rho} \end{aligned}$$

Denna ekvation kan vi integrera genom att skriva $adx = vdv \Leftrightarrow a = \frac{vdv}{dx}$

$$\begin{aligned} \frac{vdv}{dx} &= -\frac{\rho v^2}{m + x\rho} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{v}dv &= -\frac{\rho}{m + x\rho}dx \\ &\Rightarrow \\ \int_{v_0}^{v_{\text{slut}}} \frac{1}{v}dv &= -\int_0^{2L} \frac{\rho}{m + x\rho}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \\
\ln(v_{\text{slut}}) &= -\ln\left(\frac{m+2L\rho}{m}\right) + \ln(v_0) \\
&\Leftrightarrow \\
v_{\text{slut}} &= \frac{v_0}{1 + \frac{2L\rho}{m}}
\end{aligned}$$

Om vi istället integrerar till en godtycklig gräns x ovan får vi

$$\begin{aligned}
\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv &= -\int_0^x \frac{\rho}{m+x\rho} dx \\
&\Leftrightarrow \\
v &= \frac{v_0}{1 + \frac{x\rho}{m}}
\end{aligned}$$

Nu kan vi skriva $v = \frac{dx}{dt}$ och får att

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x\rho}{m}\right) dx &= v_0 dt \\
&\Rightarrow \\
\int_0^x \left(1 + \frac{s\rho}{m}\right) ds &= v_0 t \\
&\Leftrightarrow \\
x + \frac{x^2\rho}{2m} &= v_0 t \\
&\Leftrightarrow \\
x &= \frac{m}{\rho} \left(\sqrt{1 + \frac{2\rho v_0}{m} t} - 1 \right)
\end{aligned}$$