Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Onsdagen den 24 april 2019 klockan 08.30-11.30 i SB Multisal.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

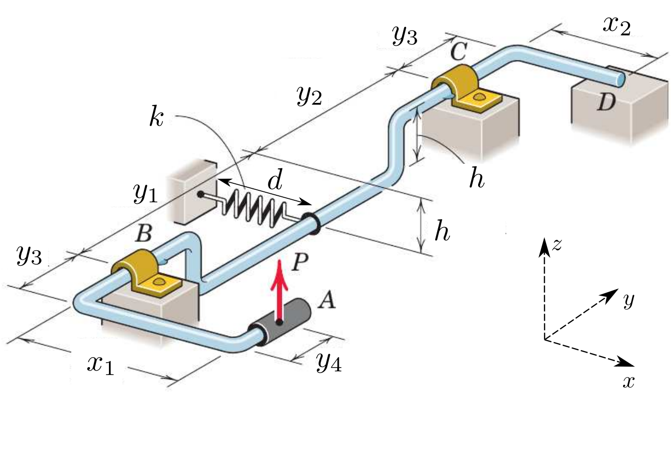
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredagen 17 maj, kl 12.30-13.00 i FL61.

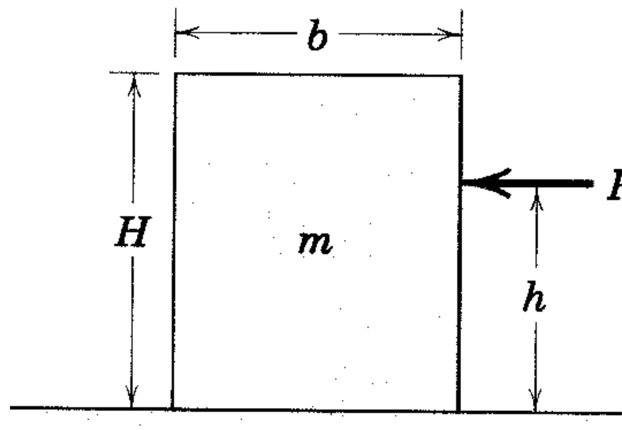
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

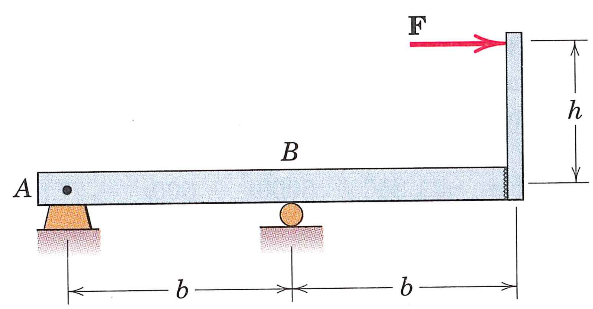
1. Fjädern i uppställningen har fjäderkonstant k och osträckt längd s. Beräkna den minsta kraft P som behövs för att precis påbörja en rotation och beräkna krafterna på axeln vid B för detta gränsfall (fästena vid B och C kan inte ta upp krafter i y-led). Försumma axelns massa och friktionen vid B och C då axeln vrids.



2. En homogen låda med massan m ses från sidan i figuren nedan. Lådan har höjden H och bredden b och står på ett underlag där den statiska friktionskoefficienten är μ. Man önskar skjuta lådan i sidled med en given horisontell kraft P. Bestäm det maximala värdet av höjden h där man kan applicera kraften så att lådan inte välter.



3. Rita grafer över skjuvspänningen V och böjmomentet M i den horisontella balken som funktioner av avståndet x från punkten A för en given belastning F. (Balkens tyngd försummas.)



Lycka till!

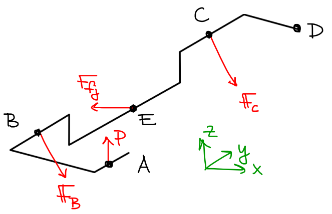
Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1 del 1

1. <u>Givet</u>: Längderna $x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4, d, h$ enligt figur i tesen, fjäderkonstanten k och fjäderns osträckta längd s. (Axelns massa och friktion i B och C försummas)

<u>Sökt</u>: Den minsta kraft P som behövs för att precis påbörja rotation samt kraftvektorn $\mathbb{F}_B$ på axeln i B i detta gränsfall.

<u>Lösning</u>: Gränsfallet fås då normalkraften i D är noll.

Frilägg axeln



Kraften från fjädern med utsträckning $\Delta \ell = d - s$ är:

$F_{fj} = k\Delta \ell = k(d-s)$

Då B och C ej tar upp krafter i y-led har vi att:

$\mathbb{F}_B = F_{Bx}\hat{\mathbb{i}} + F_{Bz}\hat{\mathbb{k}} \qquad \mathbb{F}_C = F_{Cx}\hat{\mathbb{i}} + F_{Cz}\hat{\mathbb{k}}$

Momentjämvikt (i vektorform) kring C:

ortsvektor från C till E

$$\mathbb{r}_{CE} \times (-F_{fj}\hat{\mathbb{i}}) + \mathbb{r}_{CB} \times \mathbb{F}_B + \mathbb{r}_{CA} \times P\hat{\mathbb{k}} = 0 \quad \text{där} \quad \mathbb{r}_{CE} = -y_2\hat{\mathbb{j}} - h\hat{\mathbb{k}}, \; \mathbb{r}_{CB} = -(y_1+y_2)\hat{\mathbb{j}}$$

$$\mathbb{r}_{CA} = x_1\hat{\mathbb{i}} - (y_1+y_2+y_3-y_4)\hat{\mathbb{j}}$$

Vi väljer C för att inte behöva ta med $\mathbb{F}_C$.

Vi har att:

$$\mathbb{r}_{CE} \times (-F_{fj}\hat{\mathbb{i}}) = +F_{fj}(y_2\hat{\mathbb{j}} \times \hat{\mathbb{i}} + h\hat{\mathbb{k}} \times \hat{\mathbb{i}}) = k(d-s)(-y_2\hat{\mathbb{k}} + h\hat{\mathbb{j}})$$

$$\mathbb{r}_{CB} \times \mathbb{F}_B = -(y_1+y_2)\hat{\mathbb{j}} \times (F_{Bx}\hat{\mathbb{i}} + F_{Bz}\hat{\mathbb{k}}) = -(y_1+y_2)(-F_{Bx}\hat{\mathbb{k}} + F_{Bz}\hat{\mathbb{i}})$$

$$\mathbb{r}_{CA} \times P\hat{\mathbb{k}} = -x_1 P\hat{\mathbb{j}} - (y_1+y_2+y_3-y_4)P\hat{\mathbb{i}}$$

Vi samlar ihop de olika komponenterna var för sig och får ekvationerna

$$\hat{\mathbb{j}}: \; k(d-s)h - x_1 P = 0 \implies P = k\frac{h(d-s)}{x_1}$$

$$\hat{\mathbb{k}}: \; -y_2 k(d-s) + (y_1+y_2)F_{Bx} = 0 \implies F_{Bx} = k\frac{y_2(d-s)}{y_1+y_2}$$

$$\hat{\mathbb{i}}: \; -(y_1+y_2)F_{Bz} - (y_1+y_2+y_3-y_4)P = 0 \implies F_{Bz} = -P\frac{y_1+y_2+y_3-y_4}{y_1+y_2} = -k\frac{h(d-s)}{x_1}\left(1+\frac{y_3-y_4}{y_1+y_2}\right)$$

<u>Svar</u>: $P = k\dfrac{h(d-s)}{x_1} \qquad \mathbb{F}_B = k\dfrac{y_2(d-s)}{y_1+y_2}\hat{\mathbb{i}} - k\dfrac{h(d-s)}{x_1}\left(1+\dfrac{y_3-y_4}{y_1+y_2}\right)\hat{\mathbb{k}}$

<u>Kontroller</u>:

Dimensioner: $[P] = N/m \cdot \frac{m^2}{m} = N \qquad [F_{Bx}] = N/m \cdot \frac{m^2}{m} = N \qquad [F_{Bz}] = N/m \cdot \frac{m^2}{m} \cdot 1 = N$ OK!

$k = 0 \implies P = F_{Bx} = F_{Bz} = 0$ OK!

$d > s \implies P > 0$ och $F_{Bx} > 0$ OK!

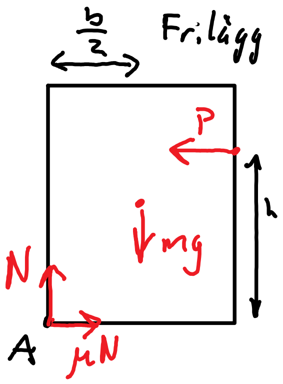
Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1, del 1

Givet: massa m, längder H, b, kraft P.

Sökt: Maximalt h innan lådan välter istället för att glida.

Lösning:

I det kritiska gränsfallet för glidning gäller att friktionskraften är μN. För det kritiska gränsfallet för rotation gäller att normal (och friktionskraften) verkar i lådans hörn.



Frilägg och ställ upp jämviktsekvationer

$$F_x: \quad \mu N - P = 0 \quad \Rightarrow P = \mu N \qquad (1)$$

$$F_y: \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow N = mg \qquad (2)$$

$$M_z^{(A)}: \quad Ph - mg\frac{b}{2} = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad h_c = \frac{mg}{2P} b \overset{(1)}{=} \frac{mg}{2\mu N} b \overset{(2)}{=} \frac{b}{2\mu}$$

Väljer vi: $h > h_c$ får vi något positivt i (3) d.v.s. netto positiv rotation. Alltså $h < \frac{b}{2\mu}$ för glidning <u>utan</u> rotation.

Kontroller: $[h] = \frac{[b]}{[\mu]} = \frac{m}{1}$ Dimension ok!

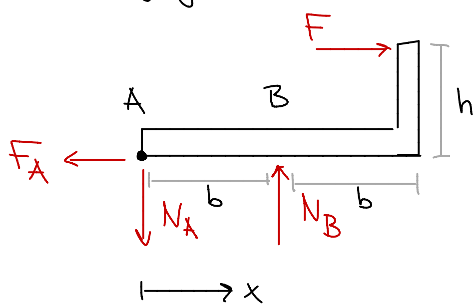
En övre gräns på h, bra.

h växer med b, bra.

h minskar med växande μ, bra. Svårare att glida $\Rightarrow$ större P behövs för glidning $\Rightarrow$ större moment kring A.

Svar: Den maximala höjden är $h = \frac{b}{2\mu}$. För värden på h under detta glider lådan utan att börja välta.

3 Frilägg balken (tyngd försummas)



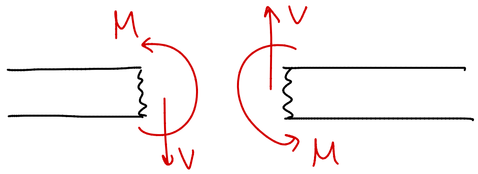
Från följande jämviktsekv.

$\uparrow$: $N_B - N_A = 0$

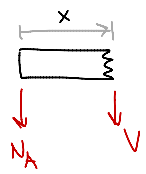
$\curvearrowleft A$: $bN_B - hF = 0$

fås att : $N_A = N_B = \frac{h}{b} N$

Teckenkonvention för skjuvspänning $V(x)$ och böjmoment $M(x)$

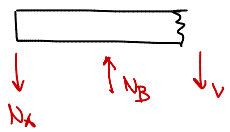


För $0 \le x < b$:



$V(x) = -N_A = -\frac{h}{b} F$

För $b < x \le 2b$:

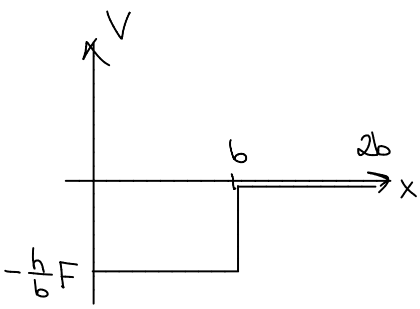


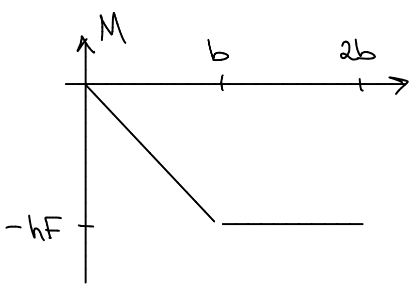
$V(x) = N_B - N_A = 0$

Böjmomentet fås genom standarduttrycket

$\frac{dM}{dx} = V$ med randvillkor $M(0) = 0$ (ty inget vridmoment från fästet i A)

Vi får att





(dim. OK)