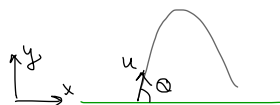


1. Givet: fart u , vinkeln Θ
Sökt: krökningsradien ρ
i banans högsta punkt.



Lösning:

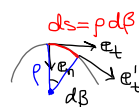
Projekten rör sig under inflytande av endast tyngdkraften (luftmotstånd försummas) och har därför den konstanta accelerationen

$$\mathbf{a} = -g\hat{j}$$

Använd normal- och tangentvektorer för att bestämma krökningsradie. Låt v vara den momentana (tidsberoende) hastigheten för projektilen. Då gäller

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = v\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{v}\mathbf{e}_t$$



$$d\mathbf{e}_t = d\beta \mathbf{e}_n \quad (\text{till första ordning})$$

Från figuren till höger får vi:

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\beta}{dt}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\beta}{dt} \mathbf{e}_n = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n$$

Alltså,

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n + \dot{v}\mathbf{e}_t$$

Vid banans högsta punkt gäller (momentant) att $\mathbf{v} = v_x \hat{i} = u \cos \Theta \hat{i}$ (v_x konstant), samt $\mathbf{e}_t = \hat{i}$ och $\mathbf{e}_n = -\hat{j}$. Vi har då att

$$\mathbf{a} = -g\hat{j} = \frac{v^2}{\rho} (-\hat{j}) + \dot{v}\hat{i} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{g} = \frac{u^2 \cos^2 \Theta}{g} \quad (\text{och } \dot{v} = 0)$$

Svar: $\rho = \frac{u^2 \cos^2 \Theta}{g}$

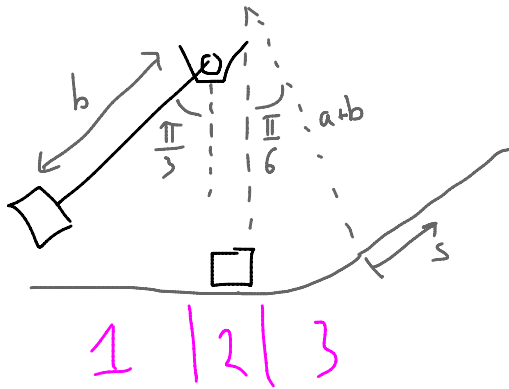
Kontroller:

Dim: $[\rho] = \frac{m^2/s^2}{m/s^2} = m$ OK!

ρ är avtagande med Θ för $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$

ρ ökar med u OK!

2



Bevarade storheter under förloppet: $\left\{ \begin{array}{l} \text{(stöt)} \quad 1) \text{ Energi} \\ \quad \quad 2) \text{ Energi \& rörelsemängd} \\ \quad \quad 3) \text{ Energi} \end{array} \right.$

$$\begin{array}{l}
 1 \quad m_A g (b - b \cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{m_A V_A^2}{2} \\
 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_A V_A^2}{2} = \frac{m_A (V_A')^2}{2} + \frac{m_B (V_B')^2}{2} \\ m_A V_A = m_A V_A' + m_B V_B' \end{array} \right. \\
 3 \quad \frac{m_B (V_B')^2}{2} = m_B g (a+b - (a+b) \cos(\frac{\pi}{6})) + m_B g s \cdot \sin(\frac{\pi}{6})
 \end{array}$$

$$① \Rightarrow V_A = \sqrt{2gb(1 - \cos(\frac{\pi}{3}))} = \sqrt{gb}$$

$$\begin{aligned}
 ② \Rightarrow m_A V_A^2 &= m_A \left(V_A - \frac{m_B}{m_A} V_B' \right)^2 + m_B (V_B')^2 \\
 (\Leftrightarrow) \quad m_B (V_B') &\left[\left(\frac{m_B}{m_A} + 1 \right) V_B' - 2V_A \right] = 0
 \end{aligned}$$

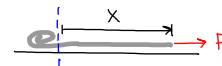
$$\Rightarrow V_B' = 2 \frac{m_A}{m_A + m_B} V_A$$

$$③ \Rightarrow s = \frac{(V_B')^2}{g} - (a+b)(2 - \sqrt{3}) = 4 \frac{m_A^2}{(m_A + m_B)^2} \cdot b - (a+b)(2 - \sqrt{3})$$

$$[s] = m \quad \underline{ch!}$$

- 3 Givet: linjedensiteten ρ [kg/m], kraften P samt dynamiska friktionskoefficienten μ_k .

Sökt: Acceleration $\ddot{x}$ som funktion av x och $\dot{x}$.



Lösning:

Avgränsa ett system och analysera under ett litet förlopp Δt .

- Vid t : utdragen kedja + liten kedjebit Δx som precis ska dras ut
- Vid $t + \Delta t$: I infinitesimalgränsen har vi att: $\Delta x = \dot{x} \Delta t$ $\Delta \dot{x} = \ddot{x} \Delta t$

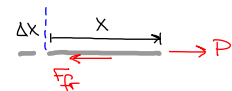
Totala rörelsemängder i horisontellt led:

$$G_1 = \rho x \cdot \dot{x} + \rho \Delta x \cdot 0 = \rho x \dot{x}$$

$$G_2 = \rho(x + \Delta x) \cdot (\dot{x} + \Delta \dot{x}) = \rho x(\dot{x} + \Delta \dot{x}) + \rho \Delta x \dot{x} + \rho \Delta x \Delta \dot{x}$$

andra ordningens term vilken kan försummas i infinitesimalgränsen $\Delta t \rightarrow 0$

Externa krafter i horisontellt led:



$$F_{fr} = \mu_k \cdot g \rho (x + \Delta x)$$

friktionskraften på kedjebiten kan försummas enligt nedan
normalkraften = tyngdkraften

Resultterande kraft (i x-led)

$$F = P - F_{fr} = P - \mu_k g \rho (x + \Delta x)$$

Impulslagen under förloppet $t \rightarrow t + \Delta t$ ger:

$$G_2 = G_1 + F \Delta t = G_1 + (P - \mu_k g \rho (x + \Delta x)) \Delta t$$

Utan andra ordningens termer får vi:

$$\rho x(\dot{x} + \Delta \dot{x}) + \rho \Delta x \dot{x} = \rho x \dot{x} + (P - \mu_k g \rho x) \Delta t$$

andra ordningens term vilken kan försummas i infinitesimalgränsen

$$\Leftrightarrow P - \mu_k g \rho x = \rho x \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta t} + \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \dot{x} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \rho x \ddot{x} + \rho \dot{x}^2$$

$$\underline{\text{Svar}} \quad \ddot{x} = \frac{1}{\rho x} (P - \mu_k g \rho x - \rho \dot{x}^2)$$

Kontroller:

$$[\mu_k g \rho x] = 1 \cdot \text{N/kg} \cdot \text{kg/m} \cdot \text{m} = \text{N}$$

$$[\rho \dot{x}^2] = \text{kg/m} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$$

$$\Rightarrow [\ddot{x}] = \frac{1}{\text{kg/m} \cdot \text{m}} \cdot \text{N} = \text{m/s}^2 \quad \text{OK!}$$

$\ddot{x}$ ökar med P samt minskar med μ_k och ρ OK!

Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Torsdagen den 21 mars 2019 klockan 08.30-11.30 i SB Multisal.

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Ulf Gran

Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

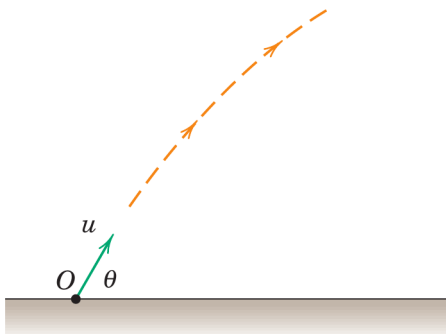
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Tisdagen 16 april, kl 12.30-13.00 i FL61.

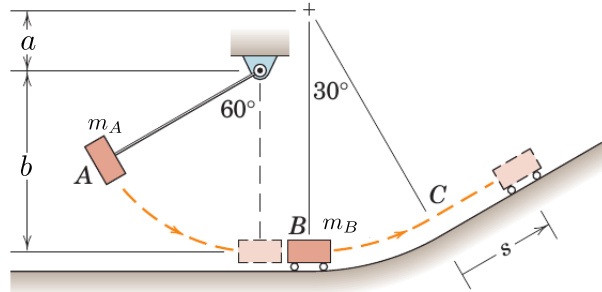
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g .

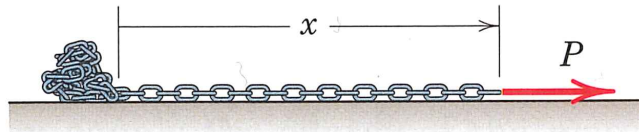
1. En projektil skjuts ut med hastigheten $\mathbf{u}$, vilken har storleken u och bildar vinkeln θ med horisontalplanet, och rör sig därefter under inflytande av tyngdkraften (bortse från luftmotståndet). Bestäm krökningsradien ρ för banan i dess högsta punkt.



2. Kroppen A med massan m_A släpps i vila i det avbildade läget med 60° utslagsvinkel, och träffar sedan vagnen B med massan m_B , som befinner sig i vila. Stöten är fullkomligt elastisk. Bestäm avståndet s från punkten C till den punkt där B vänder. Friktionen försummas.



3. Ena änden av en kedja med densiteten ρ (massa per längdenhet) dras horisontellt längs en yta av en konstant kraft P , se figuren nedan. Givet att den dynamiska friktionskoefficienten mellan kedjan och ytan är μ_k bestäm accelerationen $\ddot{x}$ hos kedjans högra ändpunkt som en funktion av x och $\dot{x}$.



Lycka till!