Tentamen i Mekanik 1 (FFM515/FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift har ändrats från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Onsdagen den 22 augusti 2018 med start 08.30 på Samhällsbyggnad.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 10.00 och 12.00.

OBS: Tentamen är indelad i **två delar**, del 1 och 2. Du kan välja **ett** av följande alternativ:

- Tentera hela kursen genom att lösa båda delarna av tentan under 5 timmar (sista inlämning 13.30). För att bli godkänd (på tentan och hela kursen) krävs för studenter registrerade på den nya kursen FFM516 minst 16 poäng totalt varav minst 8 poäng på varje del. För studenter registrerade på den gamla kursen FFM515 krävs endast minst 16 poäng totalt, dvs det finns inget krav på minst 8 poäng på varje del av tentan.

- Tentera en del av kursen genom att lösa en av delarna av tentan under 3 timmar (dvs med sista inlämning 11.30). För att bli godkänd på den del studenten valt att tentera krävs minst 8 poäng. Kan vara lämpligt val om man sedan tidigare är godkänd på en del av kursen.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, . . ., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

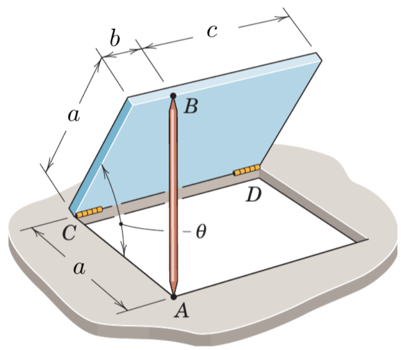
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på varje del av tentan, och maximalt 36 poäng på hela tentan. För att bli godkänd på en del av tentan krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5. För kraven att bli godkänd på båda delarna av tentan se rutan ovan. Förutsatt att man uppfyller kraven för godkänt är betygsgränserna 16-23 för betyg 3, 24-30 för betyg 4 samt 31-36 för betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredag 14/9 2018 kl 12.30-13.00 i sal FL61.

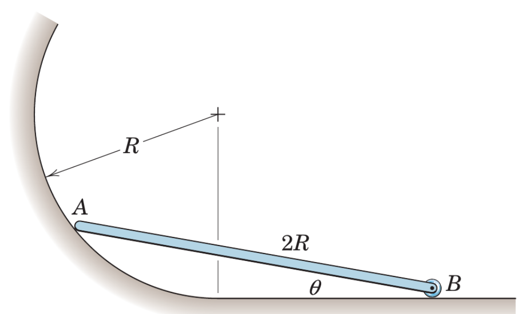
Lycka till!

Del 1

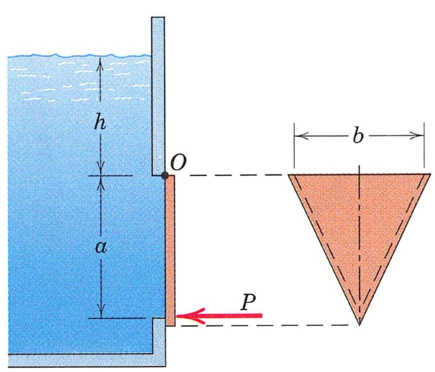
1. En lucka med massan m är uppställd med hjälp av ett stag enligt figuren. Antag att krafterna vid gångjärnen verkar längst ut i kanterna vid punkterna C och D. Beräkna kraften på luckan vid B.



2. Bestäm det maximala värdet av vinkeln θ för vilken den homogena stången förblir i jämvikt. Den statiska friktionskoefficienten vid A är μ_A och friktionen hos rull-stödet vid B kan försummas. Den vänstra delen av figuren är en cirkelbåge med radien R. Ledning: Ett mellansteg i räkningen är (antagligen) en andragradsekvation i $\sin\theta$.

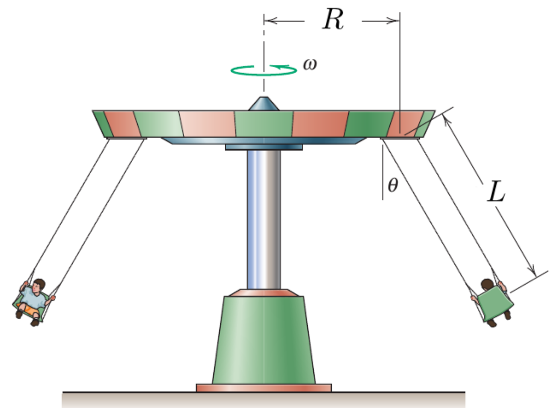


3. Vätskan har densiteten ρ. Den triangulära luckan är fritt vridbar kring en horisontell axel genom O vinkelrät mot papprets plan. Bestäm den minsta kraften P som behövs för att hålla luckan stängd.

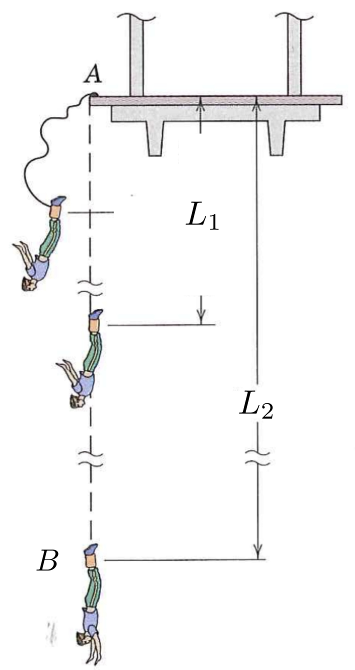


Del 2

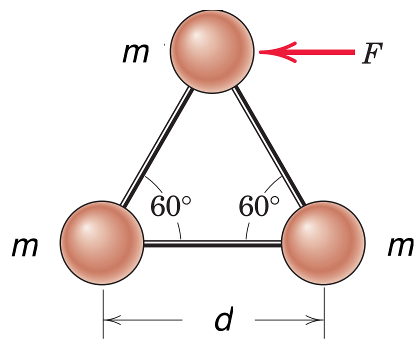
4 Beräkna den nödvändiga vinkelhastigheten ω för att slänggungorna skall hålla en konstant vinkel θ enligt figuren.



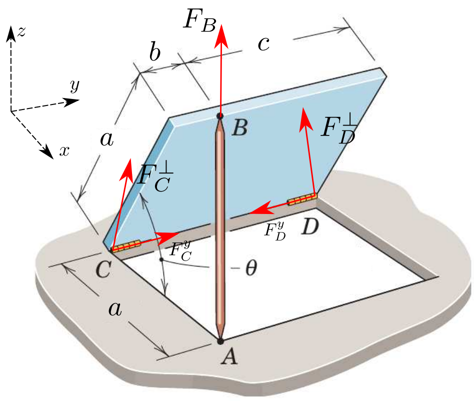
5 En bungee-hoppare med massan m hoppar från en bro vid punkten A där bungee-linan är fäst. Hen faller längden L_1 innan bungee-linan börjar dras ut (dvs bungee-linans längd när man inte drar i den är L_1) och når som mest till längden L_2 under bron innan hen studsar upp. Betrakta bungee-linan som en fjäder med fjäderkonstanten k. Beräkna fjäderkonstanten k samt hopparens maximala hastighet och var denna inträffar. Försumma alla energiförluster t ex i bungee-linan, p g a luftmotstånd etc. Personen kan betraktas som punktformig.



6 Tre identiska sfärer, vardera med massan m, är stelt ihopsatta med tre stavar, vilkas massa kan försummas. Systemet ligger på ett bord enligt figuren (dvs alla klot ligger på bordet och befinner sig i samma horisontella plan) och friktionen mellan sfärerna och bordet kan försummas. Sfärerna är i vila då en kraft F appliceras på den översta sfären enligt figuren. Beräkna accelerationen $\bar{a}$ hos sfärernas masscentrum, vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ runt masscentrum och accelerationen a hos den översta sfären *just efter* kraften börjat verka på systemet (dvs då sfärerna ännu inte hunnit flytta sig jämfört med positionerna i figuren).



Uppg 1



Riktningen av kraften F_B ges av vektorn **AB**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= (-a(1-\cos(\theta)), b, a\sin(\theta)) \\
|\mathbf{AB}| &= \sqrt{a^2 - 2a^2\cos(\theta) + \underbrace{a^2}_{\text{trig.etta}} + b^2} \\
&= \sqrt{2a^2(1-\cos(\theta)) + b^2}
\end{aligned}$$

För att ta reda på spänningen i AB kan man titta på momentjämvikt kring C eftersom vi då helt eliminerar krafterna i gångjärnet vid C. Om vi sedan väljer att titta på bara momentjämvikt kring $\hat{\boldsymbol{y}}$ axeln så eliminerar vi också krafterna från gångjärnet vid D. Vi börjar med att räkna ut vridmomentet från F_B runt C:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{F_B}^C &= \boldsymbol{B} \times F_B \frac{(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|} \\
&= F_B \frac{-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ a\cos(\theta) & b & a\sin(\theta) \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a^2\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{y}} - ab\hat{\boldsymbol{z}} \\
&\Rightarrow \\
\boldsymbol{M}_{F_B}^C &= F_B \frac{-a^2\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{y}} + ab\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2a^2(1-\cos(\theta))+b^2}}
\end{aligned}$$

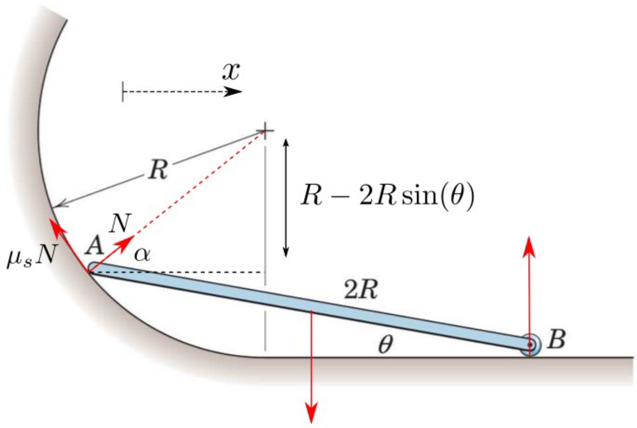
Tyngkraften kommer ge uppehov till ett moment kring $\hat{\boldsymbol{y}}$ axeln:

$$\boldsymbol{M}_g^C = \frac{a}{2}\cos(\theta)mg\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{b+c}{2}mg\hat{\boldsymbol{x}}$$

Momentjämvikt kring denna axel ger nu

$$\begin{aligned}
-F_B\frac{a^2\sin(\theta)}{\sqrt{2a^2(1-\cos(\theta))+b^2}} + \frac{a}{2}\cos(\theta)mg &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
F_B &= mg\cot(\theta)\frac{\sqrt{2a^2(1-\cos(\theta))+b^2}}{2a} \\
&= mg\cot(\theta)\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2(1-\cos(\theta))}
\end{aligned}$$

Uppg 2



Figur 2.

Först relateras den införda vinkeln α till θ:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{R - 2R\sin(\theta)}{R} \\
&= 1 - 2\sin(\theta) \\
\cos(\alpha) &= \sqrt{1 - (1 - 2\sin(\theta))^2} \\
&= \sqrt{4\sin(\theta) - 4\sin^2(\theta)}
\end{aligned}$$

Då friktionskraften är maximal precis innan stången börjar glida gäller att friktionskraftens storlek är $\mu_s N$ (som i figuren).

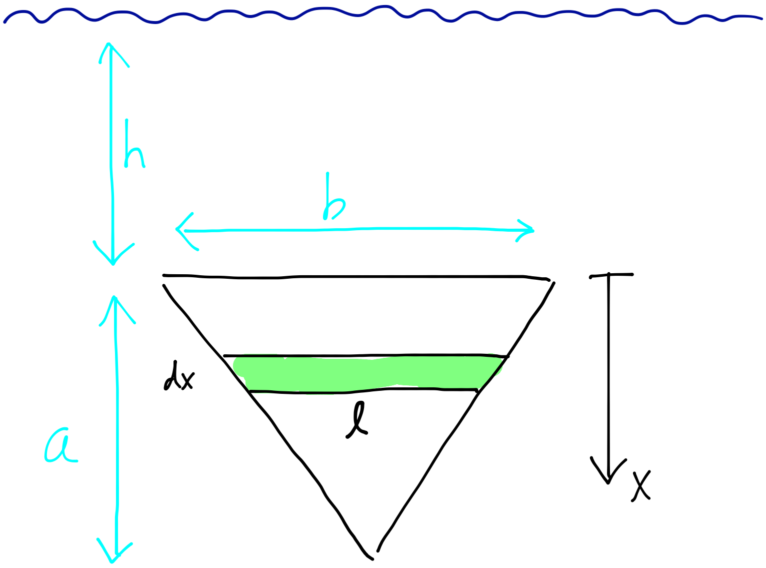
Kraftjämvikt i x-led ger direkt:

$$\begin{aligned}
N\cos(\alpha) - \mu_s N\sin(\alpha) &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\cos(\alpha) &= \mu_s \sin(\alpha) \\
&\Leftrightarrow \\
\sqrt{4\sin(\theta) - 4\sin^2(\theta)} &= \mu_s(1 - 2\sin(\theta)) \\
&\Rightarrow \\
4(\sin(\theta) - \sin^2(\theta)) &= \mu_s^2(1 - 4\sin(\theta) + 4\sin^2(\theta)) \\
&\Leftrightarrow \\
\sin^2(\theta)(4\mu_s + 4) + \sin(\theta)(-4\mu_s^2 - 4) + \mu_s^2 &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\sin^2(\theta) - \sin(\theta) + \frac{\mu_s^2}{4\mu_s^2 + 4} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\sin(\theta) - \frac{1}{2}\right)^2 &= -\frac{1}{4}\frac{\mu_s^2}{\mu_s^2 + 1} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{\mu_s^2 + 1} \\
&\Rightarrow \\
\sin(\theta) &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu_s^2 + 1}}
\end{aligned}$$

Eftersom $\mu_s^2 + 1 > 1$ så vi har en möjlig lösning

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu_s^2 + 1}}$$

Uppg 3



Tryck vid djupet $h+x$ ges av

$$P(x) = \rho g (h+x)$$

På en bit dx av luckan utövar det kraften $F = A \cdot P(x) = l\, dx\, P(x)$

Likformiga trianglar: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{l}{a-x}$

$$M = \int_0^a P \frac{b(a-x)}{a} x\, dx = \int_0^a \rho g (h+x) \frac{b(a-x)}{a} x\, dx$$

$$= \rho g \frac{b}{a} \int_0^a \left[hax - hx^2 + ax^2 - x^3 \right] dx$$

$$= \rho g \frac{b}{a} \left[\frac{hax^2}{2} + \frac{(a-h)x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a$$

$$= \rho g \frac{b}{a} \left(\frac{ha^3}{2} + \frac{(a-h)a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \right)$$

$$= \rho g \left(\frac{hba^2}{6} + \frac{ba^3}{12} \right)$$

$\curvearrowleft M = 0$:

$$aP = \rho g \left(\frac{hba^2}{6} + \frac{ba^3}{12} \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{P = \rho g b \left(\frac{ha}{6} + \frac{a^2}{12} \right)}$$

$$[P] = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m^3 = \frac{kg\, m}{s^2}$$

Uppg 4

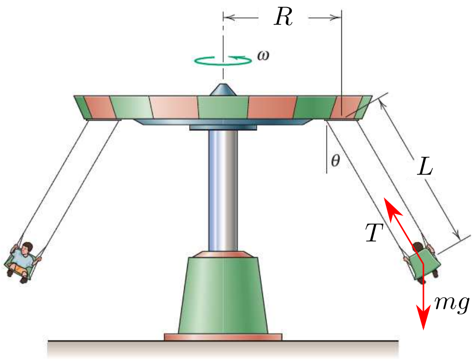


Figure 1.

Friläggning av en person tillsammans med stol ger

$$\begin{aligned} -T\sin(\theta) &= ma_r \\ T\cos(\theta) - mg &= 0 \end{aligned}$$

I andra ekvationen är högerledet noll eftersom det inte sker något acceleration i vertikal led.

Ekvationssytemet kan lösas t.ex genom att flytta över andra termen till högerledet i den andra ekvationen och dividera dem för att få

$$\tan(\theta) = -\frac{a_r}{g}$$

Uttrycket för acceleration i radiell led i polära koordinater är

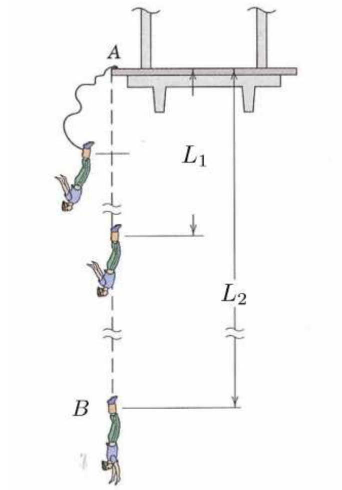
$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ &= -(R + L\sin(\theta))\omega^2 \end{aligned}$$

Insatt i ekvationen för θ ovan får man

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{(R + L\sin(\theta))\omega^2}{g} \\ &\Rightarrow \\ \omega &= \sqrt{\frac{g\tan(\theta)}{R + L\sin(\theta)}} \end{aligned}$$

Uppg 5

En bungee-hoppare med massan m hoppar från en bro vid punkten A där bungee-linan är fäst. Hen faller längden L_1 innan bungee-linan börjar dras ut (dvs bungee-linans längd när man inte drar i den är L_1) och når som mest till längden L_2 under bron innan hen studsar upp. Betrakta bungee-linan som en fjäder med fjäderkonstanten k. Beräkna fjäderkonstanten k samt hopparens maximala hastighet och var denna inträffar. Försumma alla energiförluster t ex i bungee-linan, p g a luftmotstånd etc. Personen kan betraktas som punktformig.



Lösning

När bungee-hopparen står på plattformen är rörelseenergin noll. Vid B har hen förflyttat sig en total sträcka L_2 vilket ger en förändring i potentiell energi av $\Delta V_{mg} = -mgL_2$.

Bungee-linan har nu sträckts en längd $L_2 - L_1$ från sitt jämviktläge och ger därför en förändring av potentiell energi $\Delta V_{\text{bungee}} = \frac{1}{2}k(L_2 - L_1)^2$.

När hopparen når B är farten momentant noll vilket ger att skillnaden i rörelseenergi är noll. Eftersom inga andra krafter verkar så har vi ekvationen

$$\Delta E = \Delta V_{\text{bungee}} + \Delta V_{mg} = 0$$

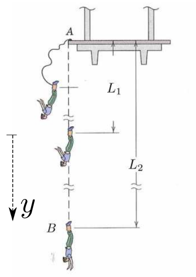
$$\frac{1}{2}k(L_2 - L_1)^2 - mgL_2 = 0$$

vilket vi kan lösa för k:

$$k = \frac{2mgL_2}{(L_2 - L_1)^2}$$

$$\left([k] = \frac{\text{kg}\frac{m}{s^2}\,m}{m^2} = \frac{\text{kraft}}{\text{meter}} \right)$$

Låt y beteckna hopparens position relativt linans jämviktsläge och v hens fart.



För $y<(L_2-L_1)$ kommer farten vara nollskilld och rörelseenergin ges av $T=\frac{mv^2}{2}$. Energiprincipen ger nu

$$\begin{aligned}
\Delta E = \Delta V_{mg} + \Delta V_{\text{bungee}} + \Delta T &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
-mg(L_1+y) + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{mv^2}{2} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
v(y) &= \sqrt{2g(L_1+y) - \frac{2gL_2}{(L_2-L_1)^2}y^2}
\end{aligned}$$

För att hitta maximum av $v(y)$ deriverar vi en gång

$$\dot{v} = \frac{g - 2\frac{gL_2}{(L_2-L_1)^2}y}{\sqrt{2g(L_1+y) - \frac{2gL_2}{(L_2-L_1)^2}y^2}}$$

Extrempunkten är därför

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
y_{\max} &= \frac{1}{2}\frac{(L_2-L_1)^2}{L_2}
\end{aligned}$$

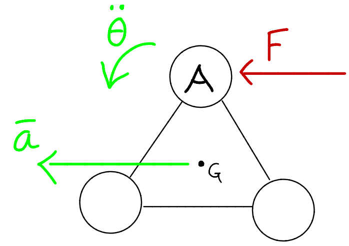
Insättning i $v(y)$ ger sedan

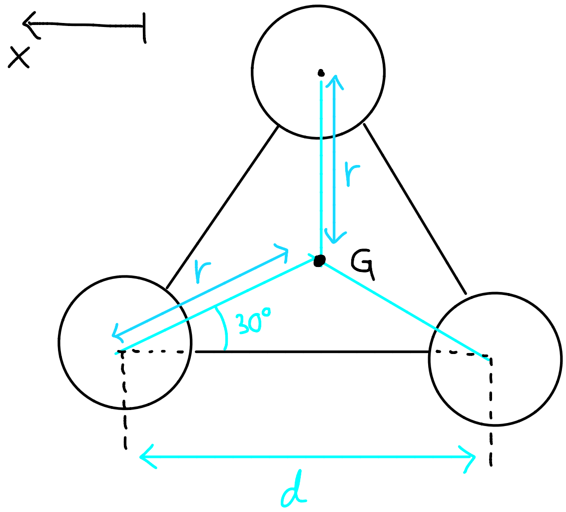
$$\begin{aligned}
v_{\max} = v(y_{\max}) &= \sqrt{2g\left(L_1 + \frac{1}{2}\frac{(L_2-L_1)^2}{L_2}\right) - \frac{2gL_2}{(L_2-L_1)^2}\frac{1}{4}\left(\frac{(L_2-L_1)^2}{L_2}\right)^2} \\
&= \sqrt{2g\left(L_1 + \frac{1}{2}\frac{(L_2-L_1)^2}{L_2}\right) - \frac{1}{2}g\frac{(L_2-L_1)^2}{L_2}} \\
&= \sqrt{2gL_1 + \frac{1}{2}g\frac{(L_2-L_1)^2}{L_2}} \\
&= (L_1+L_2)\sqrt{\frac{g}{2L_2}}
\end{aligned}$$

$$\left([v_{\max}] = m\sqrt{\frac{\frac{m}{s^2}}{m}} = \frac{m}{s}\right)$$

Uppg 6

Frilägging:





$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{d}{2r} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

Rörelseekvationen för masscentrum är

$$F\hat{x} = 3m\bar{a} \Rightarrow \boxed{\bar{a} = \frac{F}{3m}\hat{x}} \qquad [\bar{a}] = \frac{kg\,m}{kg\,s^2} = \frac{m}{s^2}$$

Kraften F skapar ett moment kring tyngdpunkten G, vilket ger en vinkelacceleration för systemet enligt

$$\dot{H}_G = M$$

Rörelsemängdsmomentet H_G och momentet M ges av

$$H_G = 3mr^2\dot{\theta} = md^2\dot{\theta}$$
$$M = r \cdot F = \frac{\sqrt{3}}{3}dF$$

$$\Rightarrow \quad \dot{H}_G = md^2\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}dF \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}F}{3md}} \qquad [\ddot{\theta}] = \frac{\frac{kg\,m}{s^2}}{kg\,m} = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_A} = \bar{a} + r\ddot{\theta}\hat{x} = \left(\frac{F}{3m} + \frac{F}{3m}\right)\hat{x} = \boxed{\frac{2F}{3m}\hat{x}}$$

$$[a_A] = [\bar{a}] = \frac{m}{s^2}$$