

Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift har ändrats från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Torsdagen den 15 mars 2018 klockan 08.30-11.30 på Samhällsbyggnad.

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Ulf Gran

Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

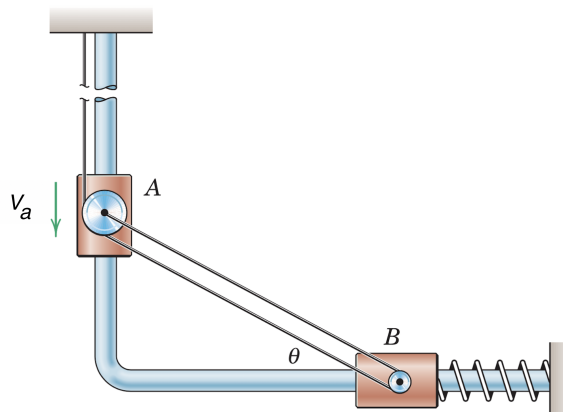
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Tisdagen 10 april, kl 12.30-13.00 i FL61.

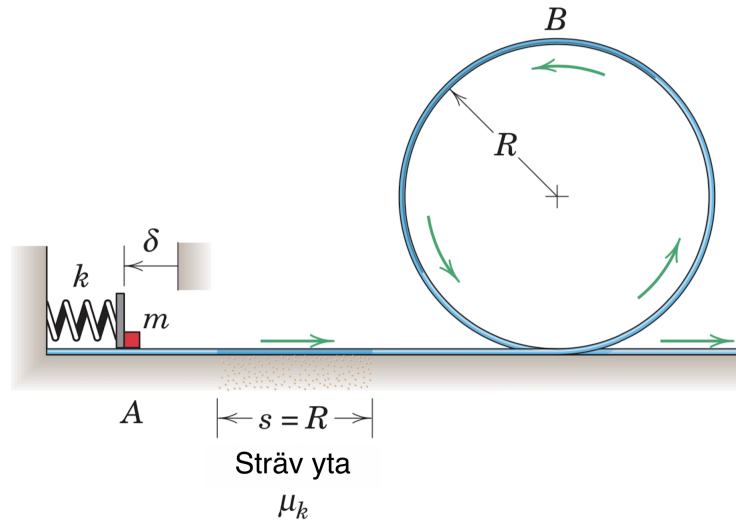
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g .

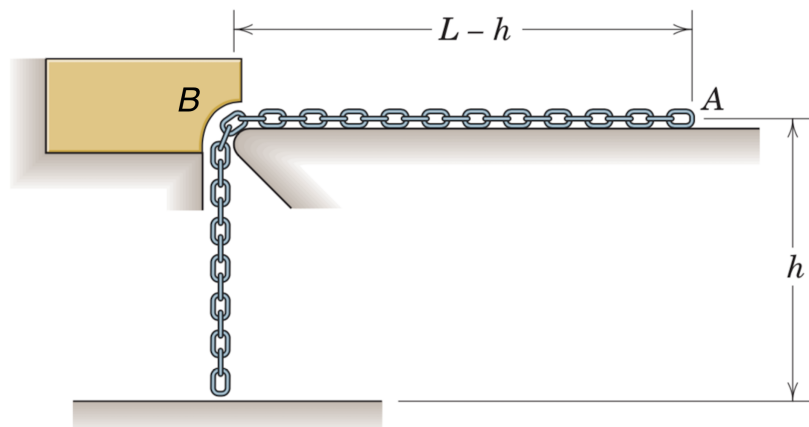
1. Cylindern A har en konstant hastighet v_a nedåt. Beräkna hastigheten hos cylinder B då vinkeln $\theta = 30^\circ$. Försumma radien hos trissorna. OBS: Kabelns längd är konstant och fjäderns enda funktion i uppställningen är att se till att kabeln hela tiden är sträckt. Med andra ord kan man utgå från att kabeln är sträckt och då bortse från fjädern.



2. En fjäder med fjäderkonstanten k trycks ihop en sträcka δ från sin fria längd. Då fjädern släpps kommer den att trycka på partikeln med massan m , som då kommer att börja glida längs banan. Bestäm minsta möjliga δ så att partikeln inte kommer att tappa kontakten med banan då partikeln passerar genom loopen. Banan är friktionsfri förutom på en sträcka s av längden R där den kinetiska friktionen är μ_k .



3. En kedja med längden L och massan ρ per längdenhet släpps från vila i den avbildade positionen, där den understa länken nästan rör den undre plattformen. Då kedjan släpps börjar den glida längs den övre plattformen, vilken är glatt. Försumma all friktion och beräkna hastigheten hos ändpunkten A på kedjan då den når slutet av den övre plattformen vid B. *Ledning:* Ett mellansteg i uppgiften kan vara att lösa en enkel separabel differentialekvation.



Lycka till!

180315 - Problem 1

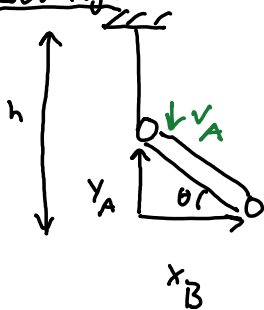
Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: hastighet v_A , vinkel θ

Sökt: hastigheten (v_B) hos B.

Plan: Konstant kabellängd $\rightarrow$ villkor att derivera!

Lösning:



Vi inför höjden till fästningen h , samt lägena y_A och x_B enligt figur. Kabelns totala längd, L , ges då av geometrin som

$$L = (h - y_A) + 2\sqrt{y_A^2 + x_B^2}.$$

Vi deriverar detta m.a.p. tiden (Obs $\dot{L} = \dot{h} = 0$)

$$0 = -\dot{y}_A + \frac{2}{\sqrt{y_A^2 + x_B^2}} (y_A \dot{y}_A + x_B \dot{x}_B) \quad (1)$$

Observera att v_A definierat nedåt i uppgiften, d.v.s. $\dot{y}_A = -v_A$

Vi har också trigonometriskt att

$$y_A = x_B \tan \theta.$$

Sätter vi in dessa i (1) har vi

$$0 = v_A + \frac{2}{\sqrt{x_B^2 \tan^2 \theta + x_B^2}} (-x_B \tan \theta v_A + x_B v_B)$$

$$\Rightarrow v_B = \tan \theta v_A - \frac{\sqrt{x_B^2 \tan^2 \theta + x_B^2}}{2 x_B} v_A$$

$$= v_A \left(\tan \theta - \frac{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}}{2} \right)$$

(*) Där vi använt att $x_B > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ← tangens dålig där!

Kontroller: Dimensionsanalys: $[v_B] = \text{m/s} \cdot 1$ ok!

Rimligt? Ökar med v_A , bra

Inte noll för $\theta = 0$, för linan "dras in"!

Det finns en "vändpunkt" då $v_B = 0$, rimligt.

Snabbare desto större θ , rimligt.

Vi sätter in $\theta = 30^\circ$, $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$v_B = v_A \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{\frac{1}{3} + 1}}{2} \right) = v_A \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{2} \right) = v_A \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0$$

$\theta = 30^\circ$ är alltså exakt vändpunkten vi nämnde ovan.

Svar: När vinkeln $\theta = 30^\circ$ så är hastigheten hos cylinder B

$$v_B = 0.$$

180315 - Problem 2

Lösningförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Fjäderkonstant k , friktionskoeff. μ_k , massa m , sträcker R .

Sökt: Kompression δ så att partikeln inte tappas kontakten med banan.

Plan: Betrakta partikelns energi under förloppet.

Lösning: Att den tappas kontakten innebär att normalkraften är noll. Detta sker (om någonslans) i toppen där hastigheten (och därmed centripetalaccelerationen) är som lägst och tyngdkraften pekar i centripetalaccelerationens riktning.

Vi studerar energin under förloppet:

1) När fjädern är ihoptryckt och partikeln är i vila är

$$E_p + E_k = \frac{1}{2} k \delta^2 + 0$$

2) När partikeln lämnar fjädern har inga andra krafter än fjädern utfört något arbete, så energin är bevarad och vi kan lösa ut hastigheten v_1 .

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \delta \quad (1)$$

3) Friktionskraften utför ett arbete. Kraften den verkar med är $-\mu_k mg$ under sträckan $s=R$, d.v.s. arbetet utfört är $-\mu_k mg R$. Hastigheten v_2 efter kan då beräknas

$$\begin{aligned} T_1 + \Delta W &= T_2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 - \mu_k mg R &= \frac{1}{2} m v_2^2, \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{v_1^2 - 2\mu_k g R} \stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{k}{m} \delta^2 - 2\mu_k g R} \quad (2) \end{aligned}$$

↑
minustecken under rot!

Inte ett problem, men värt att reflektera över att om partikeln stannar på den sträva ytan utträttar inte friktionskraften arbetet $\mu_k mg R$, utan $\mu_k mg x$ där x är hur långt in den stannar.

- 4) När partikeln kommer in i loopen börjar tyngdkraften utträta ett arbete. Kraften är $-mg$, sträckan är $2R$, så vi kan ta fram hastigheten v_3 i toppen med

$$\begin{aligned} T_2 + \Delta W &= T_3 \\ \frac{1}{2}mv_2^2 - 2mgR &= \frac{1}{2}mv_3^2 \\ \Rightarrow v_3 &= \sqrt{v_2^2 - 4gR} \stackrel{(2)}{=} \sqrt{\frac{k}{m}\delta^2 - 2\mu_k gR - 4gR} \quad (3) \end{aligned}$$

- 5) För att inte partikeln ska släppa bör det finnas en normalkraft. Detta finns i allmänhet då, för att förbli i centralrörelse,

$$N + mg = m \frac{v_3^2}{R}.$$

Extremfallet ges här av $N \rightarrow 0$, dvs

$$\begin{aligned} mg &= m \frac{v_3^2}{R} \\ (3) \Rightarrow mg &= \frac{m}{R} \left(\frac{k}{m} \delta^2 - 2\mu_k gR - 4gR \right) \\ \Rightarrow mg(1 + 2\mu_k + 4) &= \frac{k}{R} \delta^2 \\ \Rightarrow \delta &= \sqrt{\frac{mgR}{k}} \sqrt{5 + 2\mu_k} \end{aligned}$$

(Kort lösning:
Partikeln börjar i vila. Sedan utträttar fjädern arbetet $\frac{1}{2}k\delta^2$, den sträva ytan arbetet $-\mu_k mgR$, gravitationen arbetet $-mg2R$,
 $\Delta T = \Delta W \Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 - \mu_k mgR - 2mgR \Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\delta^2 - 2\mu_k mgR - 4mgR}$
För att inte släppa är tyngdkraften inte större än motsvarande centripetal acceleration,
 $mg = m \frac{v_3^2}{R} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{mgR}{k}} \sqrt{5 + 2\mu_k}$)

Kontroller: Dimension: $\left[\right] = \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{N/kg} \cdot \text{m}}{\text{N/m}} \right)^{1/2} = \text{m} \quad \text{ok.}$

Kontroller: Dimension: $[] = \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{N/kg} \cdot \text{m}}{\text{N/m}} \right)^{1/2} = \text{m}$ ok.

Rimligt: Ökar med m, g, R, μ_k , minskar med k , ok.
Går inte mot noll om $\mu_k \rightarrow 0$, ok.

Svar: För att inte tappa kontakten behöver fjädern pressas ihop

$$\delta = \sqrt{\frac{mgR}{k}} \sqrt{5 + 2\mu_k}.$$

180315 - Problem 3

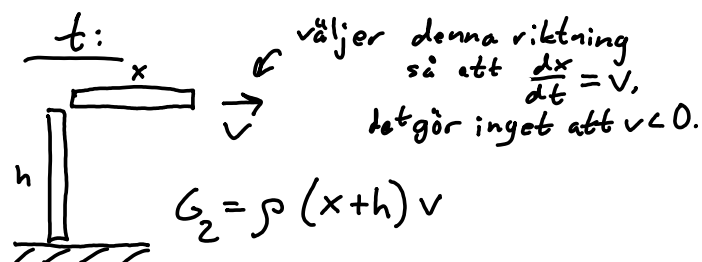
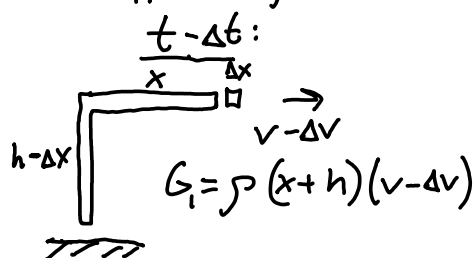
Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Sträcker L, h , linjedensitet ρ .

Sökt: Hastigheten v_B av änden vid hörnet.

Plan: Variabel massa, så frilägg vid t och $t+\Delta t$, kraftteckningar och sedan den kinematik som behövs.

Lösning: För att slippa ta med normalkrafter vid botten betraktar vi en uppdelning i t och $t+\Delta t$ istället, enligt figur:



$$F = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{G_2 - G_1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow -h\rho g = \rho(x+h) \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta \rightarrow d} \rho(x+h) \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{gh}{x+h}$$

$$\Rightarrow dv = -\frac{gh}{x+h} \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\frac{1}{v}} dx$$

$$\Rightarrow v dv = -\frac{gh}{x+h} dx \quad (v dv = a dx)$$

$$\text{Integrera} \Rightarrow \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v=0}^{v=v_B} = \left[-gh \ln(x+h) \right]_{x=L-h}^{x=0}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v=0}^v = \left[-gh \ln(x+h) \right]_{x=L-h}$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 = gh \ln \frac{L}{h}$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gh \ln \frac{L}{h}}$$

Kontroller: Dim: $\left[\right] = \left(\frac{m}{s^2} \cdot m \cdot 1 \right)^{1/2} = m/s, \text{ ok!}$

Växer med g, h, L , ok.

Logaritmen aldrig negativ, ty $L > h$.

$L > h \Rightarrow v_B > 0$, rimligt för det innebär att A startar i B.

Svar: Änden har hastigheten

$$v_B = \sqrt{2gh \ln \frac{L}{h}}$$

när den når B.