

Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Tisdagen den 9 januari 2018 klockan 14.00-17.00 på Samhällsbyggnad.

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Ulf Gran

Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15 och 16.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

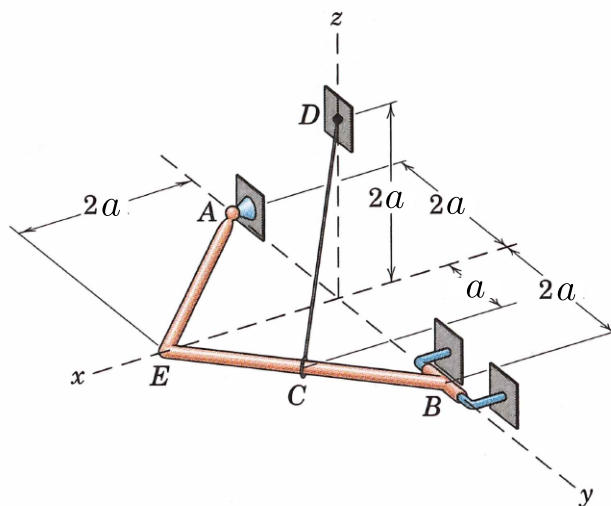
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst fyra poäng och 4-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredag 2 februari, kl 12.30-13.00 i FL61.

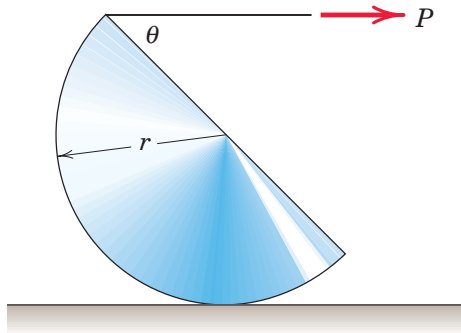
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g .

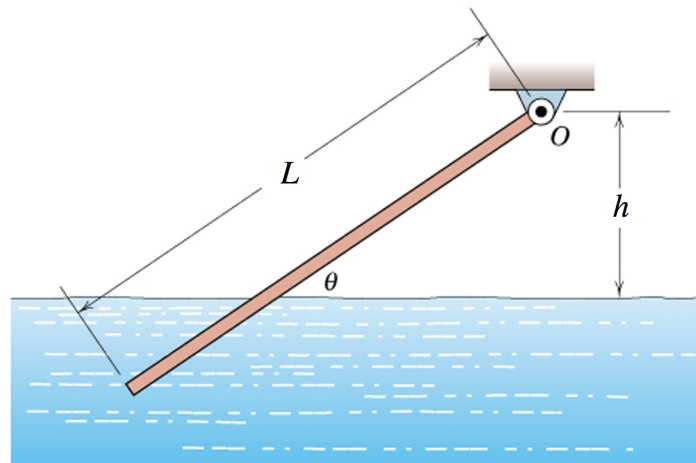
1. Beräkna kraften i linan CD samt reaktionskraften från väggen på kulleden i A vid jämvikt. Den V-formade staven är homogen och de två delarna har massan m vardera. Fästet vid B är fritt vridbart kring y -axeln, och kan även glida längs y -axeln, och det finns inget vridmoment kring x - och z -axlarna från infästningen i B vid jämvikt (även om denna infästning i allmänhet kan ge ett vridmoment längs dessa axlar).



2. Den homogena halvcylindern hålls på plats i det avbildade läget genom kraften P . Den statiska friktionskoefficienten mellan halvcylindern och underlaget är μ_s . Hur stor kan vinkeln θ vara utan att glidning sker?



3. En tunn plank med längd L , tvärsnittsarea A och densitet ρ_1 har ett gångjärn i övre änden enligt figuren och ligger därför delvis nersänkt i vattnet som har densitet ρ_2 . Beräkna sinus för vinkeln θ .



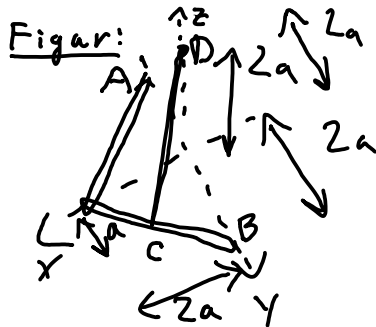
Lycka till!

180109 - Problem 1

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

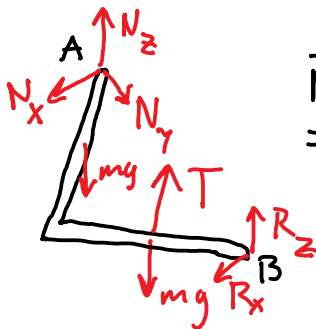
Givet: Längder : a , massor m .

Sökt: Spänning T i linan, reaktionskraften $\vec{N}$ i A .



Plan: Jämvikt: Frilägg och ställ upp jämviktsekvationer

Lösning: Frilägg



$$\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$$

$$\vec{T} = T \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = T \frac{(-a, -a, 2a)}{a\sqrt{1+1+4}} = \frac{T}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2)$$

Obekanta: $N_x, N_y, N_z, R_x, R_z, T$

3 kraftekv, 3 moment ekv. $\Rightarrow$ 6 ekv, 6 doek $\Rightarrow$ välbestämt.

Jämviktsekvationer:

Vi kan eliminera behovet att räkna ut R_x och R_z

genom att välja B som punkt att betrakta momentkring:

$$\vec{F}_Y: N_y - \frac{T}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow N_y = \frac{T}{\sqrt{6}} \quad (1)$$

$$\vec{M}_B: (a\hat{x} - a\hat{y}) \times (-mg\hat{z}) + (a\hat{x} - 3a\hat{y}) \times (-mg\hat{z}) + (-4a\hat{y}) \times \vec{N}$$

$$\begin{aligned}
 & + (a\hat{x} - a\hat{y}) \times \vec{T} = 0 \\
 \Rightarrow & \left(amg + 3amg - 4aN_z - a\frac{2}{\sqrt{6}}T \right) \hat{x} \\
 & + \left(amg + amg + 0 - a\frac{2}{\sqrt{6}}T \right) \hat{y} \\
 & + \left(0 + 0 + 4aN_x - \left(a\frac{1}{\sqrt{6}}T + a\frac{1}{\sqrt{6}}T \right) \right) \hat{z} = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_z = mg - \frac{1}{2\sqrt{6}}T \\ T = \sqrt{6}mg \\ N_x = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \sqrt{6}mg \\ N_x = \frac{1}{2}mg \\ (1) \begin{cases} N_y = mg \\ N_z = \frac{1}{2}mg \end{cases} \end{cases}$$

Kontroller: $[T] = N$ $[N_x] = N$, $[N_y] = N$, $[N_z] = N$, bra.
Tecknen är vad man röntade sig.

Svar: Kraften i linan är

$$T = \sqrt{6}mg$$

och reaktionskraften: $\vec{N}$ är

$$\vec{N} = mg \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right), \quad |\vec{N}| = \frac{\sqrt{6}}{2}mg$$

180109 - Problem 2

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: massa m , radie r , kraft P , friktionskoefficient μ_s

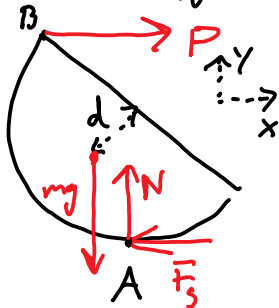
Sökt: Maximal vinkel θ för jämvikt.

Figur:



Plan: Jämvikt: Frilägg och ställ upp jämviktsekvationer
Obs. Hitta masscentrum och friktion.

Lösning: Frilägg cylindern



Jämviktsekvationer:

$$F_x: P - F_s = 0 \quad \Rightarrow P = F_s \quad (1)$$

$$F_y: N - mg = 0 \quad \Rightarrow N = mg \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A: \vec{r}_B \times \vec{P} + \vec{r}_{cm} \times (-mg \hat{y}) &= 0 \\ \Rightarrow (r \hat{y} + r(-\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})) \times P \hat{x} + \\ & (r \hat{y} + d(-\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y})) \times (-mg \hat{y}) = 0 \\ \Rightarrow -r(1 + \sin \theta)P \hat{z} + d \sin \theta mg \hat{z} &= 0 \\ \Rightarrow \sin \theta = \frac{rP}{dmg - rP} \stackrel{(1)}{=} \frac{rF_s}{dmg - rF_s} \end{aligned}$$

I det kritiska läget gäller att

$$F_s = \mu N \stackrel{(2)}{=} \mu mg$$

vilket ger

$$\sin \theta = \frac{r\mu_s}{d - r\mu_s} \quad (1)$$

Nu vill vi bestämma tyngdpunkten hos cylindern:



Dela upp den i skivor enligt figur med tvärsnittsarea $\frac{1}{2}r^2 dy$ och tyngdpunkt (som triangel) vid $\frac{2}{3}r \sin \varphi$

Då har vi alltså att

$$md = \int y dm = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{2}{3}r \sin \varphi}_y \underbrace{\rho_A \frac{1}{2}r^2 dy}_{dm} = \frac{r^3}{3} \rho_A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3}r^3 \rho_A$$

där vi introducerat areadensiteten $\rho_A = \frac{m}{(\frac{\pi r^2}{2})}$ och alltså

$$d = \frac{4}{3\pi} r$$

Detta insatt i (1) ger

$$\sin \theta = \frac{\mu_s}{\frac{4}{3\pi} - \mu_s} = \frac{3\pi \mu_s}{4 - 3\pi \mu_s}$$

Kontroller: $[\sin \theta] = 1$, allt enhetslöst, bra.

Växer med μ_s , bra.

Från 0 när $\mu_s = 0$ till 1 när $\mu_s = \frac{2}{3\pi}$.

Om $\mu_s > \frac{2}{3\pi}$ då? Då nås helt enkelt inte det kritiska fallet $\vec{F}_s = \mu_s N$ innan cylindern välter!

$$0 < \theta < \pi/2 \Rightarrow \theta = \sin^{-1}[\sin \theta]$$

Svar: Den maximala vinkeln är

$$\theta_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{3\pi \mu_s}{4 - 3\pi \mu_s}\right)$$

för $0 \leq \mu_s < \frac{2}{3\pi}$ och

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

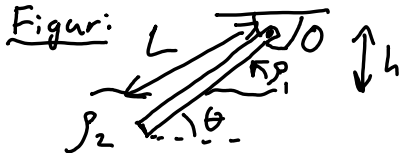
för $\mu_s \geq \frac{2}{3\pi}$ (då glider den inte före att den välter).

180109 - Problem 3

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: densiteter ρ_1, ρ_2 , längder L, h , tvärsnittsarea A .

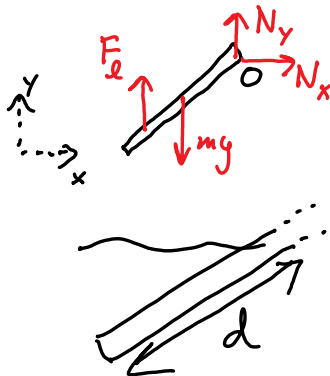
Sökt: $\sin \theta$ vid jämvikt.



Plan: Jämvikt: Frilägg och ställ upp jämviktsekvationer.

Vätskan tillför en lyftkraft å Arkimedes princip.

Lösning: Frilägg plankan:



Där $m = \rho_1 AL$.

Lyftkraften ges av $F_b = \rho_2 g Ad$

där vi infört d , längden av plankan under vatten, enligt figur.

Momentjämvikt kring O:

$$\curvearrowleft M_O: \frac{L}{2} \cos \theta \rho_1 AL - \left(L - \frac{d}{2}\right) \cos \theta \rho_2 Ad = 0$$

$$\Rightarrow L^2 \rho_1 - 2Ld \rho_2 + d^2 \rho_2 = 0$$

Obs, dividerar med $\cos \theta$!
 $\cos \theta = 0$ lösning?

$$\Rightarrow (d - L)^2 = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) L^2$$

$$\Rightarrow d = L - \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) L^2}$$

enda rimliga lösningen
obs, krav $\rho_1 < \rho_2$

$\sin \theta$ ges (ur figur) av

$$\sin \theta = \frac{h}{L - d} = \frac{h}{L \sqrt{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}}}$$

Kontroller: $[\sin \theta] = \frac{m}{m \sqrt{1 - \frac{\text{kg/m}^3}{\text{kg/m}^3}}} = 1, \text{ ok!}$

Vinkeln ökar med större h , minskar med större L . Rimligt.

För $\rho_1 = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{h}{L}$ (håll plankan över)

För $\rho_1 \rightarrow \rho_2 \Rightarrow \sin \theta \rightarrow \infty$ inte bra! Varför?

$\sin \theta \rightarrow 1 \Rightarrow L \rightarrow h$ d.v.s. plankan hänger rakt ner.

Detta händer för $\rho_1 = \rho_2 \left(1 - \frac{h^2}{L^2}\right)$.

$\sin \theta = 1$ är givetvis en lösning för även större ρ_1 , men vi dividerade bort den ($\cos \theta = 0$!) förut.

Antaganden: • Plankan når vattnet! $h < L$.

Annars $\sin \theta = 1$ (plankan hänger rakt ner, ingen lyftkraft-främman)

Svar: Vinkeln mellan plankan och ytan är sådan att

$$\sin \theta = \frac{h}{L} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}}},$$

för $h < L$ och $\rho_1 \leq \rho_2 \left(1 - \frac{h^2}{L^2}\right)$. Den triviala lösningen,

$$\sin \theta = 1$$

är också alltid en lösning.