Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 20 december 2017 klockan 14.00-17.00 på Samhällsbyggnad.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Marcus Aronsson, tel. 070-437 6483, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15 och 16.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

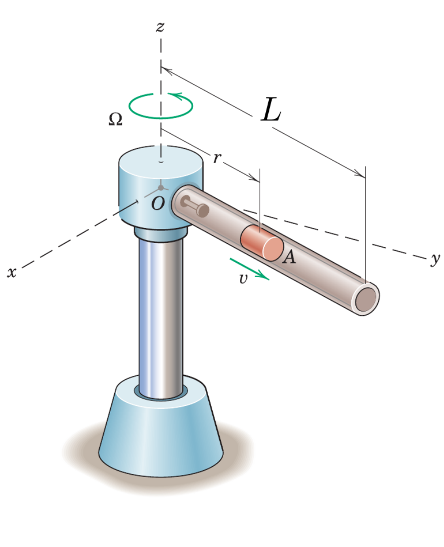
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst fyra poäng och 4-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Torsdagen 18 januari, kl 12.30-13.00 i FL61.

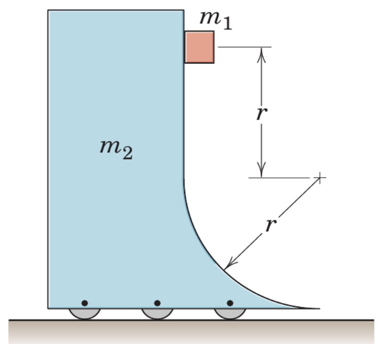
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

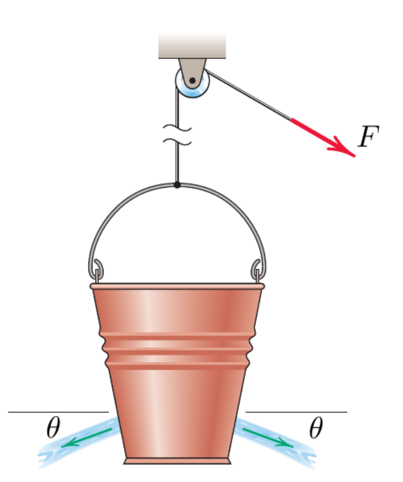
1. Det ihåliga röret med längden L roterar runt en vertikal axel genom O med en konstant vinkelhastiget $\dot{\theta} = \Omega$. En cylinder med massa m glider friktionsfritt inuti röret. Cylindern börjar på ett avstånd r_0 och har då farten v_0 längs röret. Beräkna storleken av den horisontella kraften P som verkar på cylindern precis när den lämnar röret. Svara i termer av L, v_0, m, Ω och r_0.



2. Lådan med massan m_1 glider friktionsfritt mot den ramp-formade vagnen med massan m_2, vilken rullar friktionsfritt mot underlaget. Systemet släpps från vila i den indikerade positionen. Beräkna lådans och vagnens fart precis när de separerar efter att lådan har glidit ner till rampens slut.



3. Hinken i figuren släpps från vila med initiala massan M (hink och vatten). Vattnet flödar ut genom hålen med farten v, totala massflödet m' (båda hålen tillsammans) och vinkeln θ enligt figuren. Samtidigt drar en kraft F i snöret. Beräkna hinkens acceleration i ögonblicket just efter den släppts, med positiv riktning uppåt i figuren.



Lycka till!

171220 - Problem 1

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

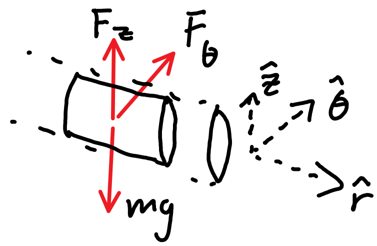
Givet: L, Ω, r_0, v_0, m

Sökt: kraften P från sidan när cylindern lämnar röret

Plan: Kraftekvationer.

Lösning:

Figur (friläggning):



Friläggning av cylindern i r- och θ-led:

$$0 = ma_r$$
$$F_\theta = ma_\theta$$

Komponenterna av accelerationen i polära koordinater ges av

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$= \ddot{r} - r\Omega^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$= 2\dot{r}\Omega$$

Insatt i de första ekvationerna får man

$$0 = -ma_r = m(r\omega^2 - \ddot{r}) \Rightarrow \ddot{r} = r\omega^2, \qquad (1)$$
$$F_\theta = 2m\dot{r}\Omega. \qquad (2)$$

Den första av dessa ger implicit $\dot{r}(r)$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{r}^2)}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d(\dot{r}^2)}{dr} = r\Omega^2$$

Integrera m.a.p. r,

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + C.$$

Vi vet att $\dot{r}(r_0) = v_0$ och därmed

$$C = \frac{1}{2}\left(v_0^2 - r_0^2\Omega^2\right),$$

vilket ger

$$\dot{r} = \sqrt{v_0^2 + \Omega^2(r^2 - r_0^2)}\ .$$

Detta insatt i (2) ger

$$F_\theta = 2m\sqrt{v_0^2 + \Omega^2(r^2 - r_0^2)}\ \Omega$$

När cylindern lämnar röret är $r = L$,

$$P = F_\theta(L) = 2m\sqrt{v_0^2 + \Omega^2(L^2 - r_0^2)}\ \Omega$$

<u>Kontroller</u>: $[P] = \text{kg}\ \text{m/s}\ \text{s}^{-1} = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$, ok!

Växer med ökande v_0, Ω, L, bra!

<u>Svar:</u> Storleken på den horisontella kraften kommer att vara

$$|P| = 2m\sqrt{v_0^2 + \Omega^2(L^2 - r_0^2)}\ |\Omega|$$

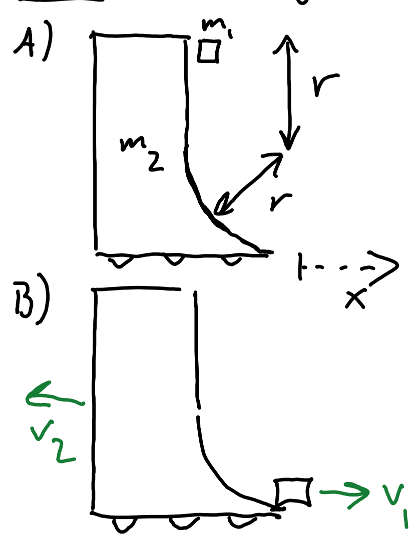
171220 - Problem 2

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: massor m_1, m_2, sträckor r.

Sökt: hastigheter v_1 och v_2

Plan: Bevaring av energi och rörelsemängd.



Lösning: Betrakta systemet bestående av vagn och låda. Inga externa krafter ger upphov till några impulser i x-led vilket medför att rörelsemängden i x-led är bevarad. Inga externa krafter förutom tyngdkraften utför något arbete på systemet vilket också medför att mekaniska energin är bevarad.

i A)

$$E_A = 2m_1 g r$$

$$G_A^x = 0$$

i B)

$$E_B = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$G_B^x = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

Rörelsemängdsbevaring: $G_A^x = G_B^x \Leftrightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1$ (1)

Energibevaring: $E_A = E_B \Leftrightarrow 2m_1 g r = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2} v_1^2 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{4gr}{1 + \frac{m_1}{m_2}}} \quad (v_1 \text{ positiv}) \quad (3)$$

$$(3) \text{ i } (1) \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{4gr}{1 + \frac{m_1}{m_2}}}$$

Kontroller: $[v_1] = \sqrt{\frac{m/s^2 \cdot m}{1 + \frac{kg}{kg}}} = m/s$ ok

$[v_2] = \frac{kg}{kg} [v_1] = m/s$ ok

$m_2 \gg m_1 \Rightarrow v_1 \Rightarrow \sqrt{4gr}$ bekant

Svar: Lådan kommer att röra sig med farten

$$v_1 = \sqrt{\frac{4gr}{1+\frac{m_1}{m_2}}}$$

åt höger och vagnen kommer att röra sig med farten

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{4gr}{1+\frac{m_1}{m_2}}}$$

åt vänster vid separation.

171220 - Problem 3

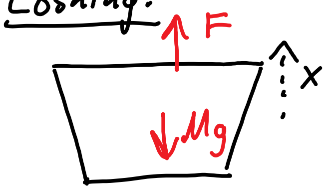
Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Initial massa M, kraft F, vinkel θ, flödeshastighet v, massflöde m'

Sökt: Hinkens acceleration, a.

Plan: Analysera flödet vid t och $t+\Delta t$ med $\Delta G = \sum_i F_i \Delta t$

Lösning:



vid t:

$$G^x_t = 0$$

vid $t+\Delta t$:

$$G^x_{t+\Delta t} = (M-\Delta m)\Delta v - \Delta m v \sin\theta$$

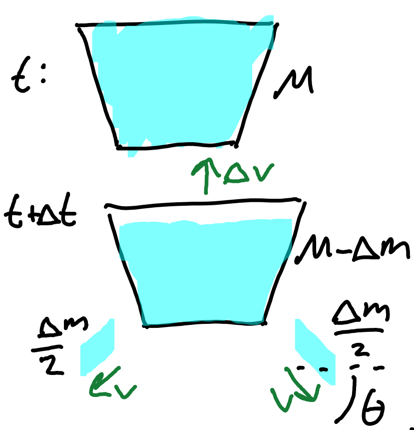
Förändringen i rörelsemängd ges av impulser:

$$\Delta G = \sum_i F_i \Delta t$$

$$\Rightarrow M\Delta v - \Delta m v \sin\theta = (F - Mg)\Delta t \quad (\text{kastar } O(\Delta^2))$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{F}{M} - g + \frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{1}{M} v \sin\theta$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{M} - g + \frac{m'}{M} v \sin\theta \quad (\text{infinitesimalt})$$



Kontroller:

$$[a] = \Big[\underbrace{\frac{F}{M}}_{\frac{kg\,m/s^2}{kg}} - \underbrace{g}_{m/s^2} + \underbrace{\frac{m'}{M} v \sin\theta}_{\frac{kg/s}{kg}\frac{m}{s}}\Big] = m/s^2 \quad \text{, ok!}$$

Ökar med F, minskar med g, ökar med m', v och θ, rimligt.

Svar: Hinken accelererar med

$$a = \frac{F}{M} - g + \frac{m'}{M} v \sin\theta$$

uppåt.