Tentamen i Mekanik 1 (FFM515/FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 16 augusti 2017 med start 08.30 i “Maskin”-salar.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 10.00 och 12.00.

OBS: Tentamen är indelad i **två delar**, del 1 och 2. Du kan välja **ett** av följande alternativ:

- Tentera hela kursen genom att lösa båda delarna av tentan under 5 timmar (sista inlämning 13.30). För att bli godkänd (på tentan och hela kursen) krävs för studenter registrerade på den nya kursen FFM516 minst 8 poäng totalt varav minst 4 poäng på varje del. För studenter registrerade på den gamla kursen FFM515 krävs endast minst 8 poäng totalt, dvs det finns inget krav på minst 4 poäng på varje del av tentan.

- Tentera en del av kursen genom att lösa en av delarna av tentan under 3 timmar (dvs med sista inlämning 11.30). För att bli godkänd på den del studenten valt att tentera krävs minst 4 poäng. Kan vara lämpligt val om man sedan tidigare är godkänd på en del av kursen.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska uttryckas i de storheter som är givna i uppgiftstexten och i tillhörande figur (samt tyngdaccelerationen g om denna behövs) och, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

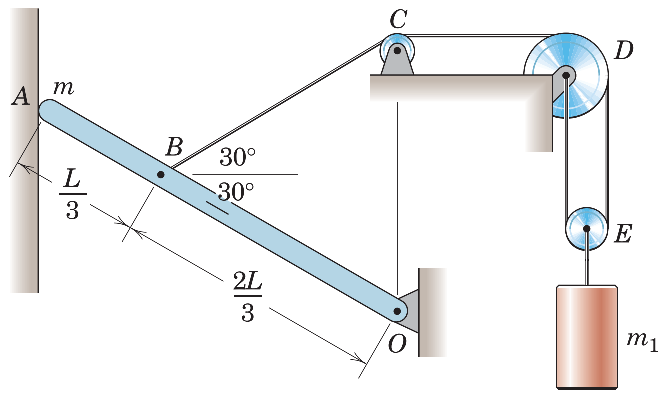
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på varje del av tentan, och maximalt 18 poäng på hela tentan. För att bli godkänd på en del av tentan krävs minst fyra poäng och 4-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5. För kraven att bli godkänd på båda delarna av tentan se rutan ovan. Förutsatt att man uppfyller kraven för godkänt är betygsgränserna 8-10 för betyg 3, 11-14 för betyg 4 samt 15-18 för betyg 5.

Rättningsgranskning: Fredag 8/9 2017 kl 12.30-13.00 i sal N6115.

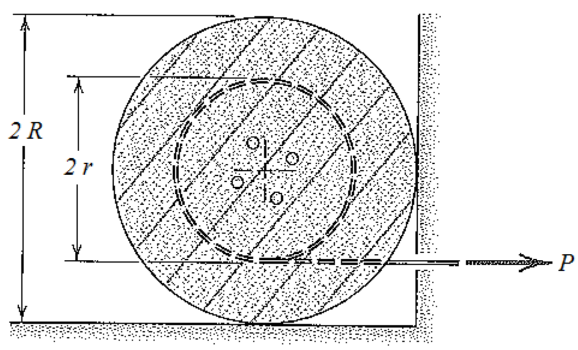
Lycka till!

Del 1

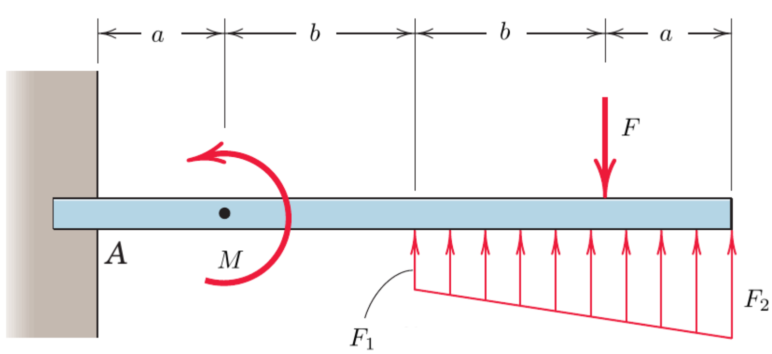
1. Den homogena stången har massan m och längden L. Bestäm normalkraften från väggen i punkten A då friktionen försummas.



2. Kabelrullen har massan m och den kinetiska friktionskoefficienten är μ_k i både den horisontella och vertikala kontaktytan. Hur stor skall kraften P vara för att rullen skall rotera med konstant vinkelhastighet?

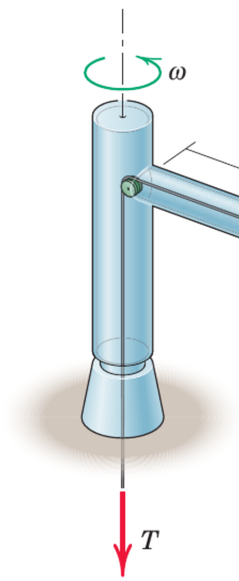


3. Beräkna den vertikala reaktionskraften F_A samt vridmomentet M_A som verkar på balken vid A för att balken ska vara i jämvikt. Notera att F_1 och F_2 här är värden på lasten och alltså har enhet kraft/längd.

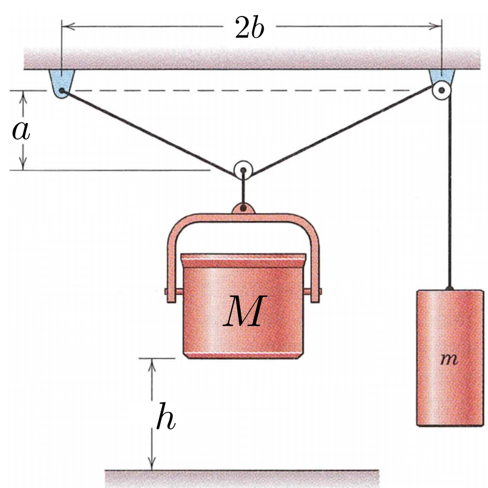


Del 2

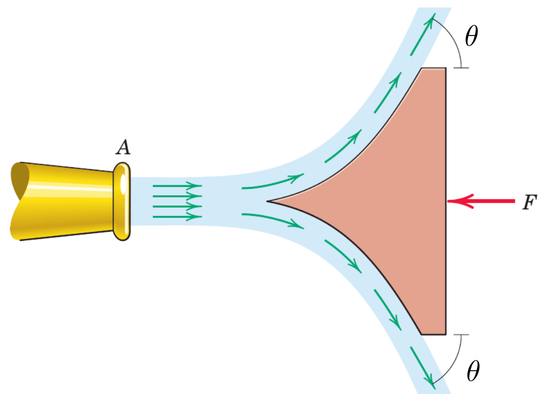
4 Ett ihåligt rör roterar runt vertikalaxeln med en vinkelhastighet $\omega = \dot{\theta}$ och vinkelaccelerationen $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Cylindern P med massan m glider friktionslöst inuti röret och dras av linan inåt mot centrum. Beräkna spänningen T i linan och den horisontella kraften F_θ som röret utövar på cylindern i termer av $m, r, \dot{r}, \ddot{r}, \omega$ och $\dot{\omega}$.



5 Systemet släpps i vila i det avbildade läget. Bestäm massan m så att massan M precis kommer att vidröra underlaget innan den vänder.



6 Vatten med densiteten ρ sprutar ut från en slang med hastigheten v (m/s) och med ett flöde c (m^3/s). Strålen delas i två delar av ett hinder, enligt figuren på nästa sida, varvid båda av vattenflödets två delar ändrar riktning med vinkeln θ. Beräkna kraften F (i termer av storheter givna i uppgiftstexten) som krävs för att hindret inte ska röra sig. Observera att vattenflödet sker i ett horisontellt plan, dvs vattnet rör sig inte i höjdled.



A
θ
F
θ

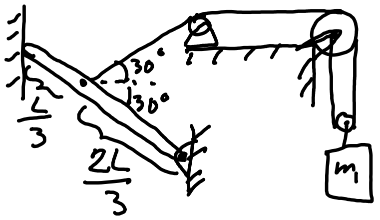
170816 - Problem 1

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Stavens längd, l, massa, m, och viktens massa, m_1, vinklar enligt figur

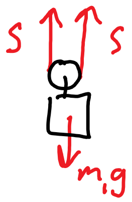
Sökt: Normalkraften från väggen.

Figur:



Lösning:

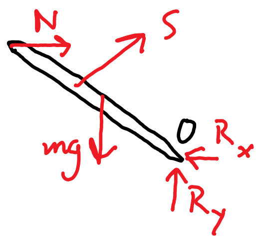
Frilägg vikten:



Kraftjämvikt i vertikalled: $2S - m_1 g = 0$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} m_1 g \qquad (1)$$

Frilägg stången:



Momentjämvikt kring O:

$$-L N \sin 30^\circ - \frac{2L}{3} S \sin 60^\circ + \frac{L}{2} mg \cos 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{\frac{1}{2} mg \cos 30^\circ - \frac{2}{3} S \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\overset{(1)}{=} mg \frac{\sqrt{3}}{2} - m_1 g \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Kontroller: $[N] = [mg] = [m_1 g] = N$, ok!

Växer med växande m, avtar med växande m_1, bra!

Svar: Normalkraften från väggen i A är $N = \frac{\sqrt{3}}{2} mg - \frac{\sqrt{3}}{3} m_1 g$

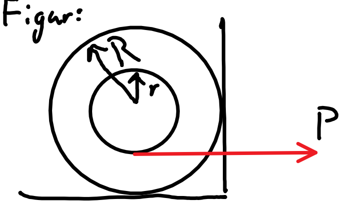
170816 - Problem 2

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Dimensioner r, R, massa m, dynamisk friktionkoefficient μ_k.

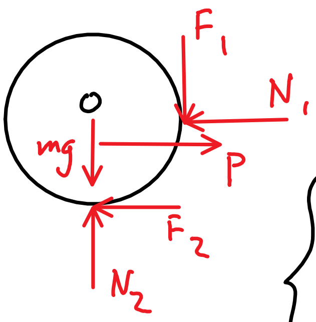
Sökt: Kraft P krävd för konstant vinkelhastighet.

Figur:



Lösning: Konstant vinkelhastighet innebär att det inte finns någon resulterande kraft eller moment.

Frilägg:



Där $F_1 = \mu_k N_1$ och $F_2 = \mu_k N_2$.

Jämviktsekvationer:

$$\begin{cases} \rightarrow: & P - N_1 - F_2 = 0 \\ \uparrow: & N_2 - F_1 - mg = 0 \\ \circlearrowleft O: & rP - RF_1 - RF_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{r \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} P = N_1 + \mu_k N_2 & (1) \\ P = \frac{R}{r}\mu_k (N_1 + N_2) & (2) \\ N_2 - \mu_k N_1 = mg & (3) \end{cases}$$

Likställande av H.L. i (1) och (2) ger

$$N_1 = \mu_k N_2 \frac{\left(\frac{R}{r} - 1\right)}{\left(1 - \frac{R}{r}\mu_k\right)}. \qquad (4)$$

Insättning av (4) i (3) ger

$$N_2 = mg \left[1 - \mu_k^2 \frac{R-r}{r - \mu_k R} \right]^{-1}, \qquad (5)$$

och (4) i (1) ger

och (4) i (1) ger

$$P = \mu_k N_2 \left(1 + \frac{R-r}{r-\mu_k R}\right). \qquad (6)$$

Slutligen, insättning av (5) i (6) ger

$$P = mg\,\mu_k \frac{1 + \frac{R-r}{r-\mu_k R}}{1-\mu_k^2 \frac{R-r}{r-\mu_k R}} = mg\,\mu_k \frac{R(1-\mu_k)}{r(1+\mu_k^2) - R(\mu_k+\mu_k^2)}$$

Kontroller: $[P] = [mg]\frac{[R]}{[r+R]} = [mg] = N$, ok!

$N_2 \to mg$, $N_1 \to 0$ när $\mu_k \to 0$, bra!

$r = R\frac{(\mu+\mu^2)}{(1+\mu^2)}$ kritisk och inte omöjlig.

"Det spelar ingen roll hur stort P är, den kommer att stanna oavsett".

Med större friktion kommer då rullen vilja rulla åt andra hållet, och P alltså behöva vara negativt. Rimligt!

Obs! Börjar rullen rulla åt vänster i figur släpper den från väggen och antagandet om normalkraften brister.

På samma sätt med ett negativt P riskerar rullen att lyfta från marken.

Svar: För konstant vinkelhastighet ska kraften vara

$$P = mg\,\mu_k \frac{R(1-\mu_k)}{r(1+\mu_k^2) - R(\mu_k+\mu_k^2)}$$

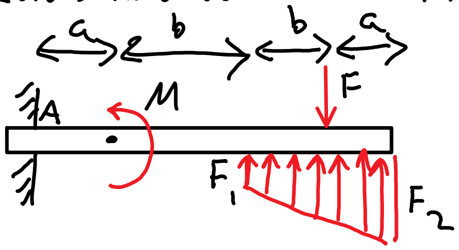
170816 - Problem 3

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Dimensioner a, b, moment M, kraft F och kraftfördelning F_1 till F_2

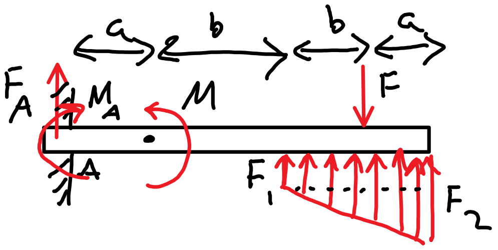
Sökt: Reaktionskraft och moment i fästet A, F_A och M_A.

Figur:



Lösning:

Frilägg:



Vi kan ersätta den distribuerade kraften genom att först dela upp kraftfördelningen i en rektangel och en triangel (enligt figur).
Resultanterna av dessa har storlek motsvarande deras area:

$$F_r = F_1(a+b) \quad \text{verkandes vid} \quad x_r = a+b+\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}(a+b)$$

och

$$F_t = \frac{1}{2}(F_2-F_1)(a+b) \text{ verkandes vid } x_t = a+b+\frac{2}{3}(a+b) = \frac{5}{3}(a+b).$$

Kraftjämvikt i vertikalled ger

$$F_A - F + F_r + F_t = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F_A = F - F_r - F_t$$
$$= F - \frac{1}{2}(a+b)(F_1+F_2)$$

Momentjämvikt kring A ger

$$M_A - M + (a+2b)F - \frac{3}{2}(a+b)F_r - \frac{5}{3}(a+b)F_t = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M_A = M - (a+2b)F + \frac{3}{2}(a+b)F_1(a+b) + \frac{5}{3}(a+b)\frac{1}{2}(F_2-F_1)(a+b)$$

$$= M - (a+2b)F + \frac{1}{6}(a+b)^2(4F_1 + 5F_2)$$

Kontroller: $[F_A] = [\underbrace{F}_{N} - \frac{1}{2}\underbrace{(a+b)}_{m}\underbrace{(F_1+F_2)}_{N/m}] = N$, ok!

Ökar med F, minskar med F_1, F_2, bra!

$[M_A] = [\underbrace{M}_{Nm} - \underbrace{(a+2b)}_{m}\underbrace{F}_{N} + \frac{1}{6}\underbrace{(a+b)^2}_{m^2}\underbrace{(4F_1 + 5F_2)}_{N/m}] = N/m$, ok!

Ökar med M, F_1, F_2, minskar med F, bra!

Svar: Reaktionskraften (uppåt) är

$$F_A = F - \frac{1}{2}(a+b)(F_1+F_2),$$

och vridmomentet (medurs!) är

$$M_A = M - (a+2b)F + \frac{1}{6}(a+b)^2(4F_1 + 5F_2).$$

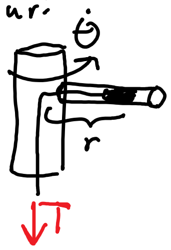
170816 - Problem 4

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

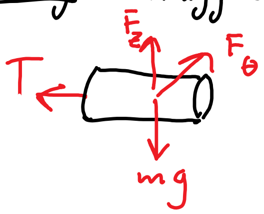
Givet: vinkelhastighet $\dot{\theta}$, vinkelacceleration $\ddot{\theta}$, massa m, radiell position och derivator $r, \dot{r}, \ddot{r}$.

Sökt: Spänning T i linan och horisontell kraft F_θ från röret.

Figur:



Lösning: Frilägg cylindern



Kraftekvationer:
$$\begin{cases} -T = m a_r \\ F_\theta = m a_\theta \end{cases}$$

I polära koordinater:
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Insatt ger
$$\begin{cases} T = m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) \\ F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}). \end{cases}$$

Kontroller:
$$[T] = kg \cdot m/s^2 = N, \text{ ok!}$$
$$[F_\theta] = kg \cdot m/s^2 = N, \text{ ok!}$$

Svar: Spänningen blir
$$T = m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})$$
och den horisontella kraften
$$F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

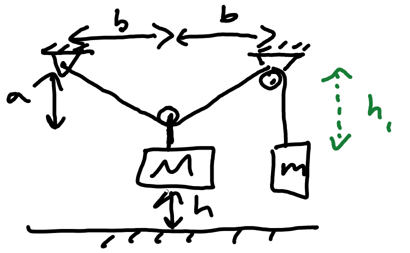
170816 - Problem 5

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

Givet: Massa M, dimensioner a, b, h.

Sökt: Massa m så att M vänder precis innan den slår i marken.

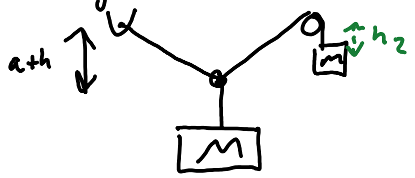
Figur:



Lösning: Snörets längd, L, konstant. I första läget har vi:

$$L = 2\sqrt{a^2+b^2} + h_1.$$

Figur (läge 2)



I andra läget har vi

$$L = 2\sqrt{(a+h)^2+b^2} + h_2.$$

dvs $h_1 - h_2 = 2\sqrt{(a+h)^2+b^2} - 2\sqrt{a^2+b^2}$

Endast gravitationen utför något arbete (och är konservativ) så vi kan använda energikonservering.

Vid båda tillfällen är massorna i vila, endast potentiell energi.

$$V_1 = Mgh$$

$$V_2 = mg(h_1-h_2) = 2mg\left(\sqrt{(a+h)^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$V_1 = V_2 \Rightarrow$

$$m = \frac{Mh}{2\left(\sqrt{(a+h)^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right)} = \frac{M}{2}\,\frac{\left(\sqrt{(a+h)^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2}\right)}{2a+h}$$

Kontroller: $[m] = [M]\dfrac{[\text{längd}]}{[\text{längd}]} = \text{kg}$, bra!

$b \to 0 \Rightarrow m = \dfrac{M}{2}$, bra!

$a, h \to 0 \Rightarrow m \to \infty$, bra!

$h \to 0 \Rightarrow m \to \dfrac{M}{2}\underbrace{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}_{1/\sin\theta}$, rimligt!

Svar: För att precis vidröra marken när vikterna vänder behöver

Svar: För att precis vidröra marken när vikterna vänder behöver

$$m = \frac{M}{2} \frac{\sqrt{(a+h)^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2}}{2a+h}$$

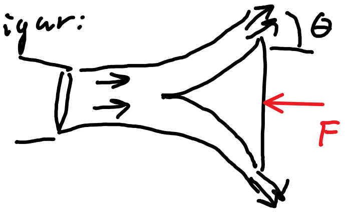
170816 - Problem 6

Lösningsförslag på tentamen
Mekanik 1

<u>Givet</u>: densitet ρ, hastighet v, flöde c, vinkel θ.

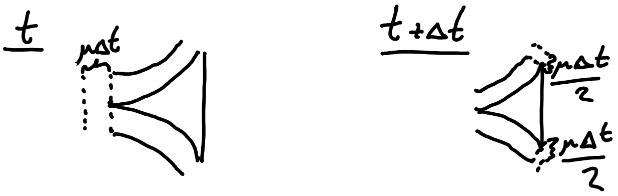
<u>Sökt</u>: Kraft F för att hålla hindret stilla.

Figur:



<u>Lösning</u>: Låt oss införa massflödet $\mu = \rho c$.

Betrakta systemet vid tidpunkt t och $t+\Delta t$:



Rörelsemängd i x-led:

$$\mu\Delta t \cdot v + \overset{\text{resten}}{p_1} \qquad\qquad 2\,\frac{\mu\Delta t}{2}\cdot v\cos\theta + p_1$$

Kraften (obs negativ riktning) ges av tidsderivatan av rörelsemängden $\approx \frac{\Delta p}{\Delta t}$,

$$-F = \frac{\mu\Delta t\cdot v\,(\cos\theta - 1)}{\Delta t} = \rho c v(\cos\theta - 1) \qquad \text{(samma när } \Delta t \to dt\text{)}$$

$$\Rightarrow F = \rho c v\,(1 - \cos\theta).$$

<u>Kontroller</u>: $[F] = [\rho][c][v] = \frac{kg}{m^3}\,\frac{m^3}{s}\,\frac{m}{s} = \frac{kg\,m}{s^2} = N$ ok!

F har rätt tecken, växer med ρ, c, v. bra!

<u>Svar</u>: Kraften behöver vara

$$F = \rho c v\,(1 - \cos\theta)$$

för att hålla hindret stilla.