Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Torsdagen den 16 mars 2017 klockan 08.30-11.30 i hörsalar på Hörsalsvägen.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

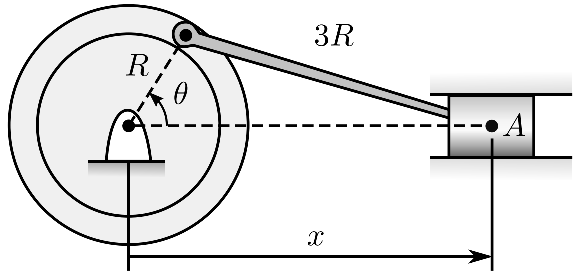
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst fyra poäng och 4-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Onsdagen 12 april, kl 12.00-12.30 i FL61.

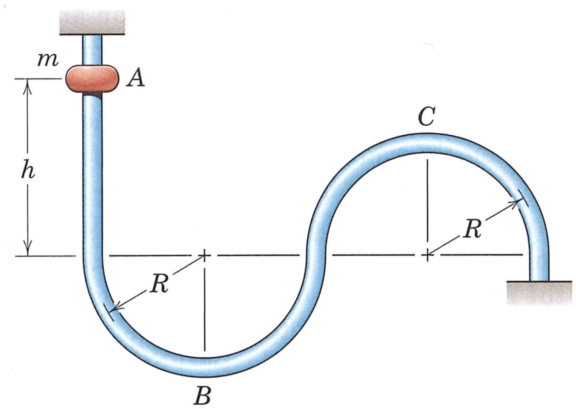
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

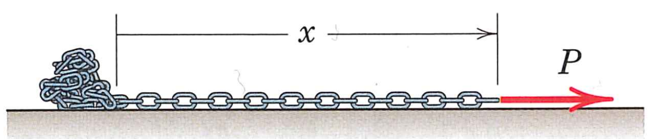
1. Med konstruktionen i figuren nedan kan en cirkulerande rörelse (hos cirkelskivan) överföras till en periodisk en-dimensionell rörelse (hos kolven). Härled ett uttryck för hastigheten $\dot{x}$ i termer av $\dot{\theta}$. Radien R är avståndet mellan centrum av cirkelskivan och fästpunkten för stången.



2. En ring släpps i vila i läget A och glider sedan friktionsfritt längs en bjöd stång. Hela systemet befinner sig i ett vertikalt plan enligt figuren nedan. Bestäm höjden h så att ringen inte påverkar stången med någon normalkraft då den passerar läge C.

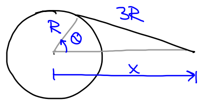


3. Ena änden av en kedja med densiteten ρ (massa per längdenhet) dras horisontellt längs en yta av en konstant kraft P, se figuren nedan. Givet att den dynamiska friktionskoefficienten mellan kedjan och ytan är μ_k bestäm accelerationen $\ddot{x}$ hos kedjans högra ändpunkt som en funktion av x och $\dot{x}$.



Lycka till!

1 Givet: Radien R, vinkeln θ och vinkelhastigheten $\dot{\theta}$



Sökt: Hastigheten $\dot{x}$

Lösning:

Från cosinussatsen har vi följande tvångsekvation

$(3R)^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\theta$

Eftersom R är konstant får vi:

$\frac{d}{dt}\left(R^2 + x^2 - 2Rx\cos\theta\right) = \frac{d}{dt}\left((3R)^2\right) = 0$

$0 + 2x\cdot\dot{x} - 2R\frac{d}{dt}(x\cos\theta) = 0$

$\cancel{2}x\dot{x} - \cancel{2}R(\dot{x}\cos\theta - x\sin\theta\ \dot{\theta}) = 0$

$\dot{x}\ (x - R\cos\theta) = -Rx\dot{\theta}\sin\theta$

Svar: $\dot{x} = -\dfrac{Rx\dot{\theta}\sin\theta}{x - R\cos\theta}$

Kontroller

$[\dot{x}] = \dfrac{m\cdot m\cdot s^{-1}}{m} = m/s$ OK!

$\dot{x}$ bör vara noll i vändpunkterna, d.v.s. då $\theta = 0$ och $\theta = \pi$

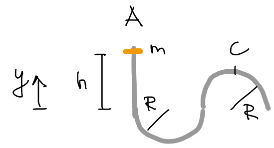
$\dot{x}(\theta = 0) = 0 = \dot{x}(\theta = \pi)$ OK!

$|\dot{x}|$ ökar med $|\dot{\theta}|$ OK!

Antag $\dot{\theta} > 0$:

$\dot{x}(\theta = \pi + \varepsilon) = \dfrac{Rx\dot{\theta}\sin\varepsilon}{x + R\cos\varepsilon} > 0$ för små $\varepsilon > 0$, alltså $\dot{x} > 0$ strax efter vänstra vändpunkten OK!

2 Givet: Radien R, massan m och att ringen glider friktionsfritt.



Sökt: Höjden h så att ringen inte påverkar stången med någon normalkraft i C.

Lösning:
Använd energiprincipen för ringen.

Normalkraften från stången är alltid vinkelrät mot färdriktningen och uträttar därför inget arbete $(\mathbf{N}\cdot d\mathbf{r}=0)$

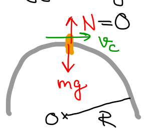
Då vi inte har någon friktion återstår då endast tyngdkraften vilken är konservativ och kan därför beskrivas med en potential.

Ringens potentiella energi i A och C:
$V_A = mgh \quad V_C = mgR$

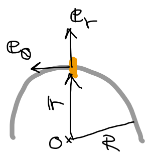
Ringens kinetiska energi i A och C:
$T_A = 0$ ty i vila $\qquad T_C=\frac{1}{2}mv_C^2$ där vi har infört ringens fart v_C i C.

Energiprincipen ger:
$E_{efter} = E_{före} + U_{infört}$
$T_C + V_C = T_A + V_A + 0$
$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgR = mgh \implies h = R + \frac{v_C^2}{2g}$ (*)

v_C fås från kravet att normalkraften är noll i C.
Frilägg ringen i C:



Då ringen i detta skede gör en centralrörelse inför vi polära koordinater i O.
Accelerationen i polära koordinater ges av
$\mathbf{a} = \underbrace{(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$

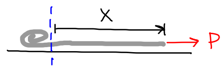


För C gäller: $r=R$, $\dot{r}=0=\ddot{r} \implies a_r = -R\dot{\theta}^2 = -\frac{v_C^2}{R}$ ty $v_C=-R\dot{\theta}$
Newton II i r-led ger att
$ma_r = N - mg = -mg \implies \frac{v_C^2}{R} = g \implies \frac{v_C^2}{g} = R$

Detta insättes i (*)
Svar: $h = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R$

$[h] = [R] = m$ OK!

3 Givet: linjedensiteten ρ [kg/m], ~~kraften~~ kraften P samt dynamiska friktionskoefficienten μ_k.

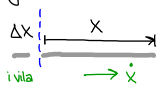


Sökt: Acceleration $\ddot{x}$ som funktion av x och $\dot{x}$.

Lösning:

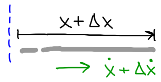
Avgränsa ett system och analysera under ett litet förlopp Δt.

1. Vid t:



utdragen kedja + liten kedjebit Δx som precis ska dras ut

2. Vid $t+\Delta t$:



I infinitesimalgränsen har vi att: $\Delta x = \dot{x}\,\Delta t \qquad \Delta\dot{x} = \ddot{x}\,\Delta t$

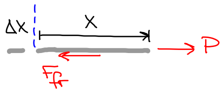
Totala rörelsemängder i horisontellt led:

$G_1 = \rho x \cdot \dot{x} + \rho \Delta x \cdot 0 = \rho x \dot{x}$

$G_2 = \rho(x+\Delta x)\cdot(\dot{x}+\Delta\dot{x}) = \rho x(\dot{x}+\Delta\dot{x}) + \rho\Delta x \dot{x} + \rho\,\Delta x\,\Delta\dot{x}$

andra ordningens term vilken kan försummas i infinitesimalgränsen $\Delta t \to 0$

Externa krafter i horisontellt led:



$F_{f} = \mu_k \cdot g\rho(x+\Delta x)$

friktionskraften på kedjebiten kan försummas enligt nedan

normalkraften = tyngdkraften

Resulterande kraft (i x-led)

$F = P - F_{f} = P - \mu_k g\rho(x+\Delta x)$

Impulslagen under förloppet $t \to t+\Delta t$ ger:

$G_2 = G_1 + F\Delta t = G_1 + (P - \mu_k g\rho(x+\Delta x))\Delta t$

andra ordningens term vilken kan försummas i infinitesimalgränsen

Utan andra ordningens termer får vi:

$\rho x(\cancel{\dot{x}}+\Delta\dot{x}) + \rho\Delta x\dot{x} = \cancel{\rho x\dot{x}} + (P - \mu_k g\rho x)\Delta t$

$\Leftrightarrow \quad P - \mu_k g\rho x = \rho x\frac{\Delta\dot{x}}{\Delta t} + \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}\dot{x} \xrightarrow{\Delta t\to 0} \rho x\ddot{x} + \rho\dot{x}^2$

Svar $\quad \ddot{x} = \frac{1}{\rho x}(P - \mu_k g\rho x - \rho\dot{x}^2)$

Kontroller:

$[\mu_k g\rho x] = 1\cdot \mathrm{N/kg}\cdot \mathrm{kg/m}\cdot \mathrm{m} = \mathrm{N}$

$[\rho\dot{x}^2] = \mathrm{kg/m}\cdot\mathrm{m^2/s^2} = \mathrm{kg\,m/s^2} = \mathrm{N}$

$\Rightarrow [\ddot{x}] = \frac{1}{\mathrm{kg/m}\cdot\mathrm{m}}\cdot\mathrm{N} = \mathrm{m/s^2}$ OK!

$\ddot{x}$ ökar med P samt minskar med μ_k och ρ OK!