Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 21 december 2016 klockan 14.00-17.00 i Hörsalsvägen 5.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Henrik Gustafsson, tel. 031-772 3157, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

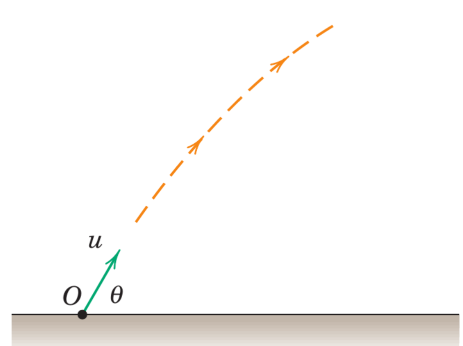
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

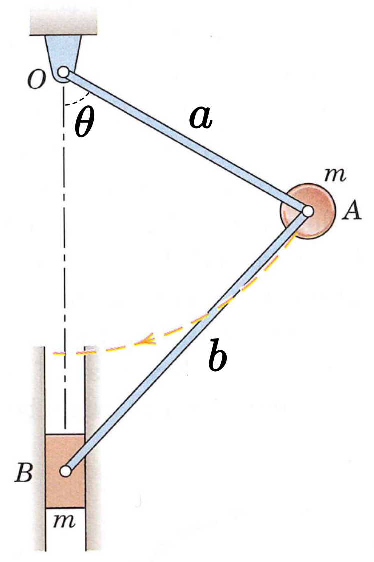
Rättningsgranskning: Datum och plats meddelas via den öppna kurshemsidan i PingPong.

Uppgifter

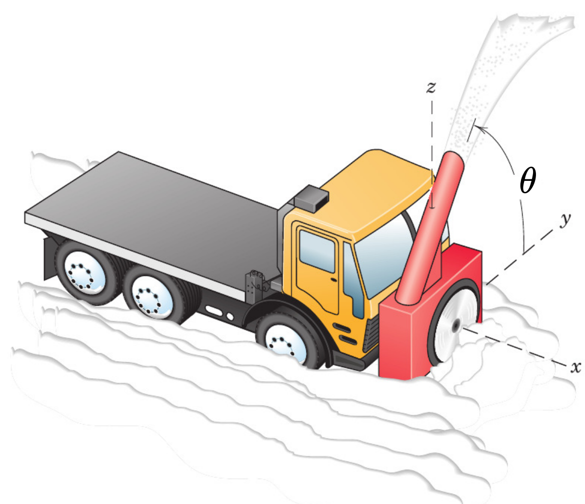
1. En projektil skjuts ut med hastigheten $\mathbf{u}$, vilken har storleken u och bildar vinkeln θ med horisontalplanet, och rör sig därefter under inflytande av tyngdkraften (bortse från luftmotståndet). Bestäm krökningsradien ρ för banan i dess högsta punkt.



2. Systemet släpps i vila i det avbildade läget, där längden OB är vertikal, och rörelsen sker under inverkan av tyngdkraften. Bestäm farten för A i det ögonblick när OA är vertikal. Stängerna är fritt vridbara vid O, A och B. (Friktionen samt stängernas massor försummas.)



3. Plogbilen, med massa M, kör med konstant fart v på en horisontell väg. Snömassan per tidsenhet som skickas ut betecknas μ, och snön skickas ut med vinkeln θ och farten u relativt plogbilen enligt figur. Bestäm kraftvektorn varmed vägen påverkar plogbilen.

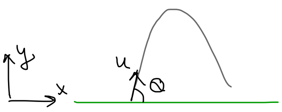


Lycka till!

Lösningsförslag 2016-12-21
Mekanik 1 del 2

1. Givet: fart u, vinkeln θ

Sökt: krökningsradien ρ i banans högsta punkt.



Lösning:

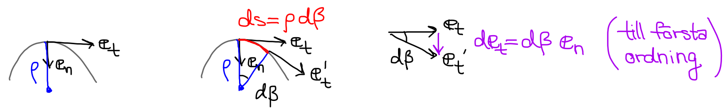
Projektilen rör sig under inflytande av endast tyngdkraften (luftmotstånd försummas) och har därför den konstanta accelerationen

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}}$$

Använd normal- och tangentvektorer för att bestämma krökningsradie. Låt $\mathbf{v}$ vara den momentana (tidsberoende) hastigheten för projektilen. Då gäller

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = v\,\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{v}\,\mathbf{e}_t$$



Från figuren till höger får vi:

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\beta}{dt}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\mathbf{e}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{e}_n$$

Alltså,

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{v}\,\mathbf{e}_t$$

Vid banans högsta punkt gäller (momentant) att $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} = u\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}$ (v_x konstant), samt $\mathbf{e}_t = \hat{\mathbf{i}}$ och $\mathbf{e}_n = -\hat{\mathbf{j}}$. Vi har då att

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}} = \frac{v^2}{\rho}(-\hat{\mathbf{j}}) + \dot{v}\,\hat{\mathbf{i}} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{g} = \frac{u^2\cos^2\theta}{g} \qquad (\text{och } \dot{v} = 0)$$

Svar: $\rho = \dfrac{u^2\cos^2\theta}{g}$

Kontroller:

Dim: $[\rho] = \dfrac{m^2/s^2}{m/s^2} = m$ OK!

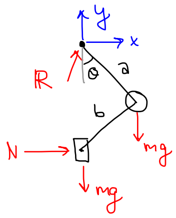
ρ är avtagande map θ för $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ρ ökar med u OK!

2. Givet: vinkeln θ, längderna a,b, massan m samt att systemet släpps i vila.
Sökt: farten v för A då OA är vertikal.

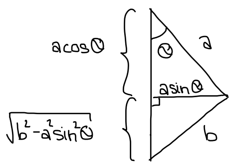
Lösning:

Frilägg systemet som består av de två stavarna och massorna:



Bortse från friktion och stångernas massor.
Under förloppet är det endast de två tyngdkrafterna som uträttar något arbete (dvs $\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} \neq 0$)
Dessa krafter är konservativa så vi kan använda deras potential före och efter förloppet: $V = mgy$

Ursprunglig energi: (släpps i vila)
Kinetisk $= 0$ ← vila
Potentiell $= -mg\, a\cos\theta - mg\left(a\cos\theta + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}\right)$



Slutgiltig energi: (då OA vertikal)
Kinetisk $= \frac{1}{2}mv^2$ (B är i vila — den går från att röra sig nedåt till att röra sig uppåt och befinner sig i vändpunkten momentant i vila.)
↑ sökt

Potentiell $= -mga - mg(a+b)$

Energiprincipen ger nu att

$$-\cancel{m}g\, a\cos\theta - \cancel{m}g\left(a\cos\theta + \sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \cancel{m}g(2a+b)$$

Vi löser ut v (som är positiv) och får:

<u>Svar</u>: $v = \left(2g\left(2a+b-2a\cos\theta - \sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta}\right)\right)^{1/2}$

Kontroller:

Dim: $[v] = \left(m/s^2\,(m)\right)^{1/2} = m/s$ OK!

$v(\theta=0) = 0$ OK!

$v(\theta) = v(-\theta)$ OK!

3. Givet: farterna u, v, snömassa/tidsenhet μ, vinkeln θ samt plogbilens massa M.

Sökt: Kraften $\mathbb{F}$ som <u>vägen</u> påverkar <u>plogbilen</u>

Lösning:

Betrakta systemet som består av plogbilen och den snö som plogas och slungas ut under ett intervall Δt. Följ systemet under intervallet Δt:

Massan Δm för snön som slungas ut under Δt är

$$\Delta m = \mu \Delta t$$

Hastigheten för snöbiten går från 0 (vila) till

$$\mathbb{v}_s = v\hat{\mathbb{i}} + u(\cos\theta\,\hat{\mathbb{j}} + \sin\theta\,\hat{\mathbb{k}})$$

Plogbilen har konstant hastighet

Total förändring av rörelsemängd för systemet under Δt:

$$\Delta\mathbb{P} = M\cdot 0 + \Delta m\cdot(\mathbb{v}_s - 0) = \Delta m\cdot \mathbb{v}_s = \mu\Delta t\left(v\hat{\mathbb{i}} + u(\cos\theta\,\hat{\mathbb{j}} + \sin\theta\,\hat{\mathbb{k}})\right)$$

Externa krafter som påverkar systemet under förloppet är:

$$\mathbb{R} = \underbrace{\mathbb{F}}_{\text{från vägen}} - \underbrace{Mg\hat{\mathbb{k}}}_{\text{tyngdkraft på plogbilen}} - \underbrace{\Delta m g\hat{\mathbb{k}}}_{\text{tyngdkraft på snöbiten (kommer försummas)}}$$

Impulslagen ger:

$$\Delta\mathbb{P} = \mathbb{R}\,\Delta t = \mathbb{F}\Delta t - Mg\Delta t\hat{\mathbb{k}} - \cancel{\Delta m g \Delta t\hat{\mathbb{k}}}$$ högre ordning försummas då vi går till infinitesimaler

Således:

<u>Svar</u>: $\mathbb{F} = \dfrac{\Delta\mathbb{P}}{\Delta t} + Mg\hat{\mathbb{k}} = \mu\left(v\hat{\mathbb{i}} + u(\cos\theta\,\hat{\mathbb{j}} + \sin\theta\,\hat{\mathbb{k}})\right) + Mg\hat{\mathbb{k}}$

Kontroller:

Dim: $[F_x] = [F_y] = \text{kg/s}\cdot\text{m/s} = \text{N}$ OK!

$[F_z] = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 = \text{N}$ OK!

F ökar med u och v OK!

$F_y(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0$ OK!