

Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Måndagen den 4 april 2016 klockan 08.30-11.30 i Maskin-salar.

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Ulf Gran

Jour: Ulf Gran, tel. 031-7723182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

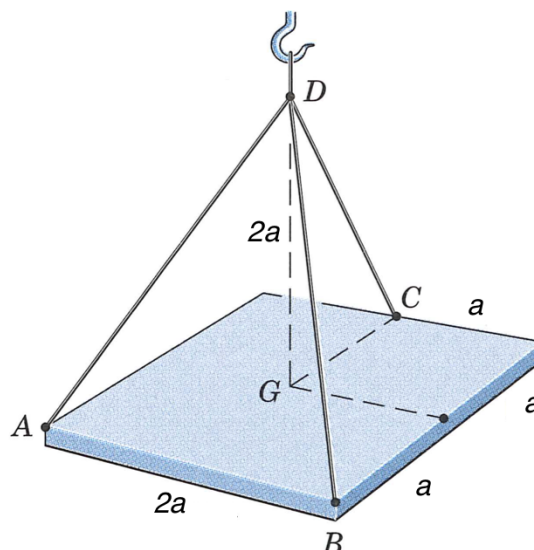
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

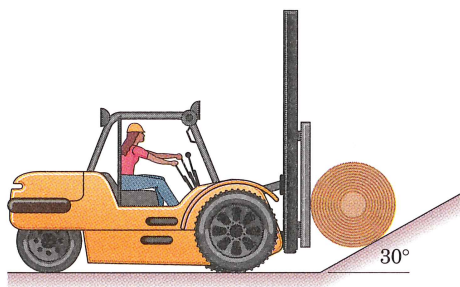
Rättningsgranskning: Datum och plats meddelas via mail (för studenter registrerade i PingPong) och via kurshemsidan.

Uppgifter

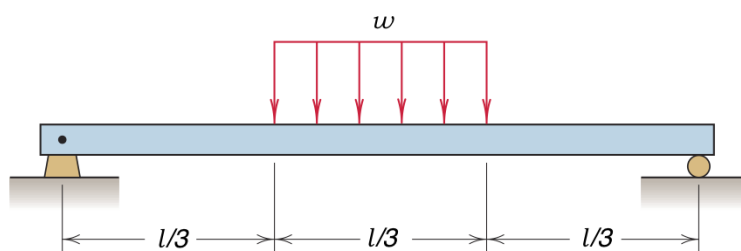
1. Den kvadratiske och homogena horisontella plattan har massan m och kantlängden $2a$. Avståndet GD är $2a$, där G är punkten mitt på plattans översida. Bestäm spännkraften i linorna AD , BD och CD .



2. Cylindern har massan m och den statiska friktionskoefficienten mellan trucken och cylindern, samt mellan cylindern och det lutande planet, är $\mu_s = \frac{1}{2}$. Bestäm den *minsta möjliga* horisontella kraften från underlaget på truckens däck för att jämvikt ska kunna råda. Notera att minsta möjliga horisontella kraft på truckens däck inträffar just innan cylindern börjar röra sig *nedför* det lutande planet.



3. Rita diagram över skjuvkraften och böjmomentet för balken med totala längden l och med belastning enligt figuren (w är en distribuerad last med enhet N/m). Bestäm även det maximala böjmomentet och dess läge på balken. Balken antas vara masslös.



Lycka till!

Sökt: Spännkraften i linorna AD, BD och CD.

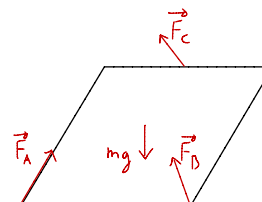
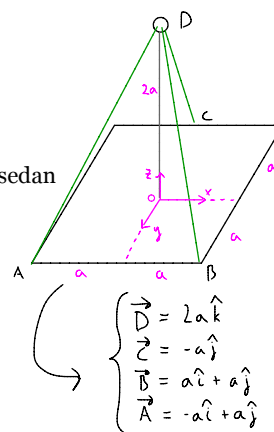
Givet: Längden a, massan m och tyngdaccelerationen g.

Plan: Frilägg plattan och lös jämviktsekvationerna.

Börjar med att skriva ner Ortsvektorer (under figur) från figuren. Uttryck sedan krafterna som vektorer med hjälp av dessa:

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{D} - \vec{A} = a\hat{i} - a\hat{j} + 2a\hat{k}, \quad |\vec{AD}| = \sqrt{6}a \\ \vec{BD} &= \vec{D} - \vec{B} = -a\hat{i} - a\hat{j} + 2a\hat{k}, \quad |\vec{BD}| = \sqrt{6}a \\ \vec{CD} &= \vec{D} - \vec{C} = a\hat{j} + 2a\hat{k}, \quad |\vec{CD}| = \sqrt{5}a\end{aligned}$$

$$\vec{F}_A = F_A \frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|}, \quad \vec{F}_B = F_B \frac{\vec{BD}}{|\vec{BD}|}, \quad \vec{F}_C = \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|}$$



Momentjämvikt och kraftjämvikt:

$$\vec{r}_D \times (F_A \frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|}) + \vec{r}_B \times (F_B \frac{\vec{BD}}{|\vec{BD}|}) + \vec{r}_C \times (F_C \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|}) = 0$$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C - mg\hat{k} = 0$$

Detta ser ut som 6 ekvationer för 3 obekanta. Tag t.ex momentjämviktsekvationerna:

$$\frac{1}{\sqrt{6}a} \cdot (F_A \underbrace{\vec{A} \times \vec{D}}_{a^2(-\hat{i} \times \hat{j}) \times 2\hat{k} = 2a^2(\hat{j} + \hat{i})} + F_B \underbrace{\vec{B} \times \vec{D}}_{a^2(\hat{i} \times \hat{j}) \times 2\hat{k} = 2a^2(-\hat{j} + \hat{i})}) + \frac{1}{\sqrt{5}a} \cdot F_C \underbrace{\vec{C} \times \vec{D}}_{a^2(-\hat{j} \times 2\hat{k}) = -2a^2\hat{i}} = 0$$

Vilket alltså ger två oberoende ekvationer, behöver en till som fås från kraftjämviktsekvationen. (Man kunde också valt att bara använda kraftjämvikt).

Tillsammans är de:

$$\begin{aligned}\hookrightarrow \hat{i}: \quad \frac{a}{\sqrt{6}}(F_A + F_B) - \frac{a}{\sqrt{5}}F_C &= 0 \quad (1) \\ \hookrightarrow \hat{j}: \quad \frac{a}{\sqrt{6}}(F_A - F_B) &= 0 \quad (2) \\ \uparrow \hat{z}: \quad \frac{2}{\sqrt{6}}F_A + \frac{2}{\sqrt{6}}F_B + \frac{2}{\sqrt{5}}F_C - mg &= 0 \quad (3)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad F_A = F_B = F \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{6}}F - \frac{1}{\sqrt{5}}F_C = 0 & (1') \\ \frac{4}{\sqrt{6}}F + \frac{2}{\sqrt{5}}F_C - mg = 0 & (3') \end{cases}$$

$$2 \cdot (1') + (3'): \quad \frac{8}{\sqrt{6}}F - mg = 0 \Rightarrow F = F_A = F_B = \frac{\sqrt{6}}{8}mg$$

$$(3') - 2 \cdot (1'): \quad \frac{4}{\sqrt{5}}F_C - mg = 0 \Rightarrow F_C = \frac{\sqrt{5}}{4}mg$$

$$[F_{A,B,C}] = [mg] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = [kraft]$$

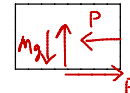
Sökt: Minsta möjliga kraft på truckens hjul så att systemet är i jämvikt.

Givet: Cylinderns massa m , statiska friktionskoefficienten $\mu = \frac{1}{2}$, vinkeln $\theta = \frac{\pi}{6}$ och tyngdaccelerationen g .

Plan: Enligt en friläggning av trucken så söker vi kraften P i figuren till höger. Minsta möjliga kraften ges strax innan cylindern börjar glida i någon punkt, antag någon punkt och kontrollera antagandet.

Jämviktsekvation för trucken:

$$\rightarrow: F - P = 0$$

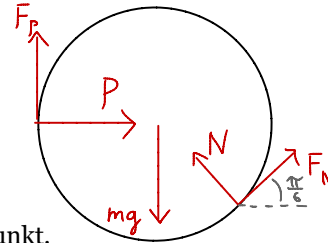


Jämviktsekvationer för cylinder:

$$\uparrow F_P - mg + N \cos \theta + F_N \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow P - N \sin \theta + F_N \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright r F_N - r F_P = 0 \quad (3)$$



Minsta möjliga kraft $\Rightarrow$ friktionskraft maximal i någon punkt.

Antag $|F_P| = \mu P$, med riktning enligt figur, dvs $F_P = \mu P$.

(Detta motsvarar rörelse nedåt för det lutande planet)

$$(3) \Rightarrow F_N = F_P = \mu P$$

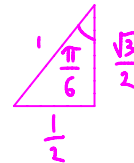
$$\mu P (1 + \sin(\theta)) + N \cos(\theta) - mg = 0 \quad (1')$$

$$P (1 + \mu \cos(\theta)) - N \sin(\theta) = 0 \quad (2')$$

$$(1') \sin(\theta) + (2') \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$P [\mu \sin(\theta) (1 + \sin(\theta)) + \cos(\theta) (1 + \mu \cos(\theta))] = mg \sin(\theta)$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Rightarrow F = P = \frac{2mg}{2\sqrt{3} + 3} \quad [P] = [mg] = [\text{kraft}]$$

$$(2) \Rightarrow N = \frac{P(1 + \mu \cos(\theta))}{\sin(\theta)} = \frac{2mg}{2\sqrt{3} + 3} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2mg \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$$

Kontroll av att friktionskraften mot lutande planet inte är maximal:

$$F_N \leq \mu N ?$$

$$\frac{F_N}{\mu N} = \frac{\cancel{\mu} P}{\cancel{\mu} N} = \frac{2mg}{2mg \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} < 1 \quad \text{ok}$$

Sökt: Diagram över skuvkraft och böjmoment samt maximala böjmomentet och dess position.

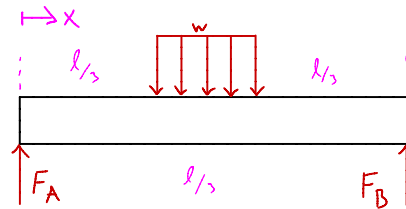
Givet: Längden l , lasten w .

Plan: Lösa för externa krafterna först, sedan analys av interna krafter genom friläggning av delar av balken.

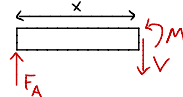
$$\curvearrowleft A: l F_D - \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot w = 0$$

$$\curvearrowright D: \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot w - l F_A = 0$$

$$\Rightarrow F_A = F_D = \frac{lw}{6}$$

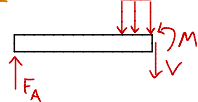


$$x < \frac{l}{3}$$



$$\begin{cases} \uparrow F_A - V = 0 \Rightarrow V = F_A = \frac{lw}{6} \\ \curvearrowleft A: M - xV = 0 \Rightarrow M = xF_A = x \frac{lw}{6} \end{cases}$$

$$\frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3}$$



$$\begin{cases} \uparrow: F_A - xw - V = 0 \\ \curvearrowleft: \frac{1}{2}(x - \frac{l}{3}) \cdot (xw) + M - xF_A = 0 \end{cases}$$

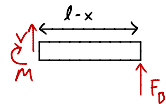
$$\uparrow \Rightarrow V = F_A - xw = w(\frac{l}{6} - x)$$

$$\curvearrowright \Rightarrow M = x \frac{wl}{6} - \frac{1}{2}x(x - \frac{l}{3})w$$

$$[V] = m \cdot \frac{[kraft]}{m} = [kraft]$$

$$[M] = m \cdot m \cdot \frac{[kraft]}{m} = m \cdot [kraft] = [vridmoment]$$

$$x > \frac{2l}{3}$$



$$\begin{cases} \uparrow V + F_D = 0 \Rightarrow V = -\frac{wl}{6} \\ \curvearrowright B: -M - (l-x)V = 0 \Rightarrow M = (l-x) \frac{wl}{6} \end{cases}$$

$$M' = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{l}{2}$$

$$M(\frac{l}{2}) = \frac{wl^2}{12} - \frac{1}{4}l(\frac{l}{6})w = \frac{1}{24}wl^2$$

