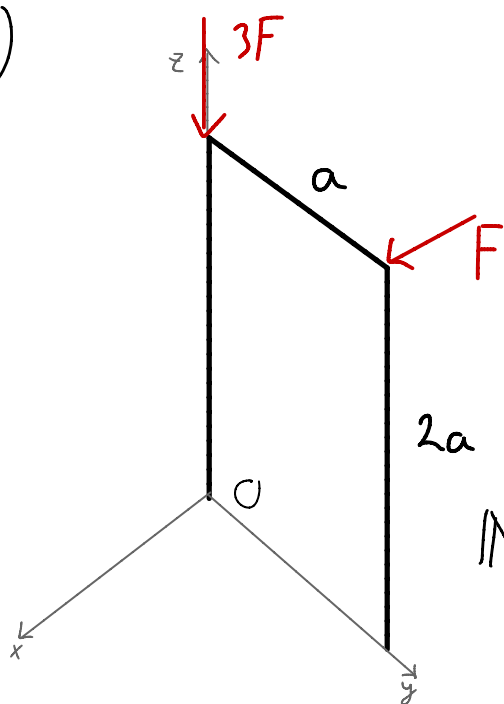


S1)



Resultanten för krafterna ges av

$$\mathbb{R} = F\hat{x} - 3F\hat{z}$$

Det resulterande vridmomentet ges av

$$M_O = (a\hat{y} + 2a\hat{z}) \times (F\hat{x}) = -aF\hat{z} + 2aF\hat{y}$$

(Kraften i $\hat{z}$ -led ger inget bidrag)

Ansätt $\mathbb{P} = y\hat{y} + z\hat{z}$ som angreppspunkt för kraftskruen.

Vi har då villkoret $\mathbb{P} \times \mathbb{R} + M \frac{1}{\sqrt{10}}(\hat{x} - 3\hat{z}) = M_O$ ①
där M är storleken på det parallella vridmomentet.

$$\mathbb{P} \times \mathbb{R} = (y\hat{y} + z\hat{z}) \times (F\hat{x} - 3F\hat{z}) = -yF\hat{z} - 3yF\hat{x} + zF\hat{y}$$

① innehåller 3 ekvationer vilka alltså lyder

$$\begin{cases} \hat{x} & -3yF + \frac{M}{\sqrt{10}} = 0 \\ \hat{y} & zF = 2aF \\ \hat{z} & -yF - \frac{3M}{\sqrt{10}} = -aF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{10} \\ z = 2a \\ M = \frac{3aF}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

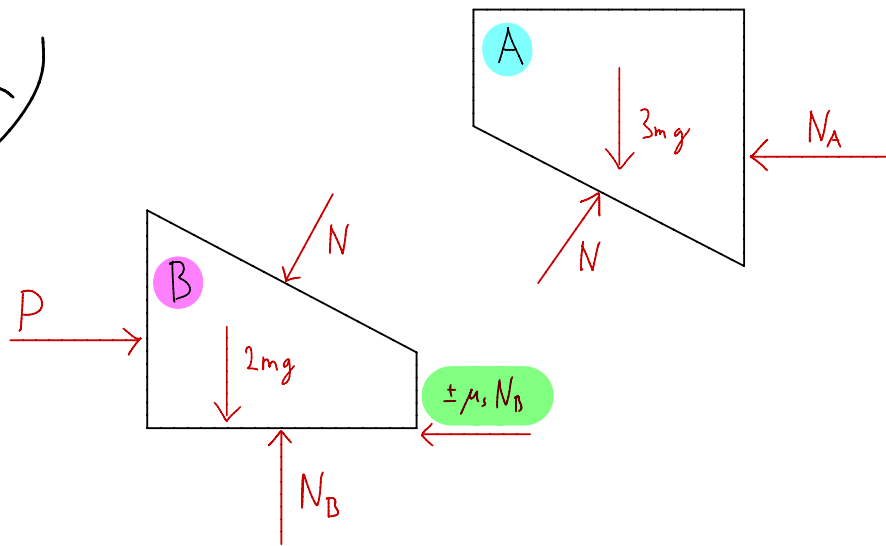
Den ekvivalenta kraftskruen ges av

$$\mathbb{R} = F\hat{x} - 3F\hat{z} \quad \text{där verkningslinjen skär } y-z \text{ planet i punkten } y = \frac{a}{10}, z = 2a$$

tillsammans med det parallella vridmomentet

$$M = \frac{3}{10} aF(\hat{x} - 3\hat{z}) \quad [M] = m \cdot [\text{kraft}] \cdot d$$

S2)



Ovan visas friläggning av A o B precis innan glidning till höger/vänster (+/- tecken på friktionskraften.)

Jämviktsekvationerna lyder:

A $\uparrow N \cos(\theta) - 3mg = 0$ ①
 $\rightarrow N \sin(\theta) - N_A = 0$ ②

B $\uparrow -N \cos(\theta) + N_B - 2mg = 0$ ③
 $\rightarrow P - N \sin(\theta) + \pm \mu_s N_B = 0$ ④

tecken beroende på glidriktning

① $\Rightarrow N = \frac{3mg}{\cos(\theta)}$

③ o ④ lyder då

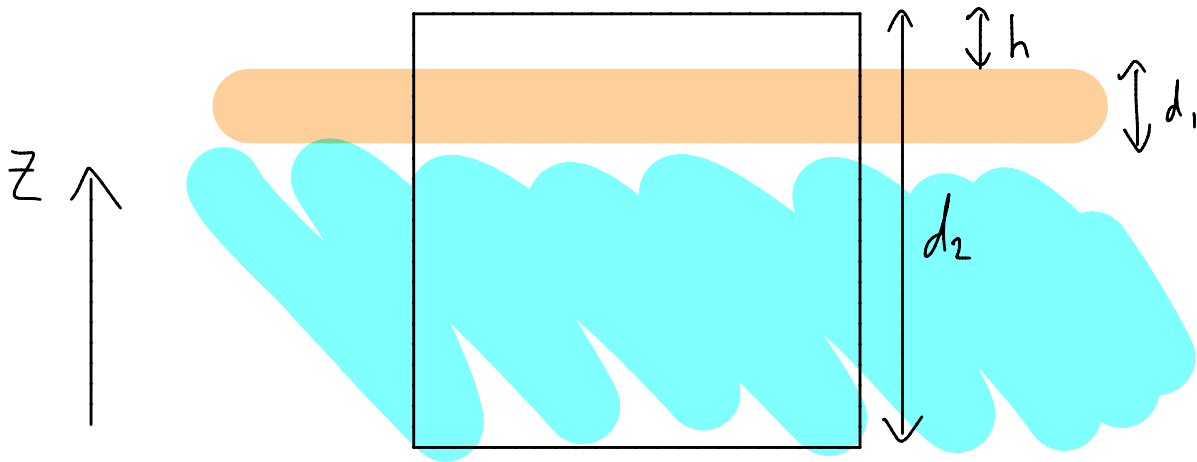
$$\begin{cases} -5mg + N_B = 0 \\ P - 3 \tan(\theta) mg + \pm \mu_s N_B = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow P = (3 \tan(\theta) \pm 5 \mu_s) mg$

P måste alltså ligga i intervallet

$$(3 \tan(\theta) - 5 \mu_s) mg < P < (3 \tan(\theta) + 5 \mu_s) mg$$

$[VL] = [HL] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ det}$

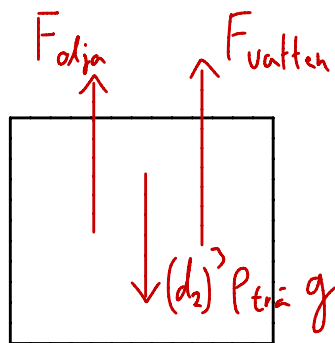


Enligt Arkimedes princip verkar det på kubens krafterna

$$F_{olja} = (d_2)^2 \cdot d_1 \cdot \rho_{olja} \cdot g \hat{z}$$

$$F_{vatten} = (d_2)^2 \cdot (d_2 - h - d_1) \cdot \rho_{vatten} \cdot g \hat{z}$$

Friläggning:



Jämviktsekvationen för kubens lyder

$$(d_2)^2 \cdot d_1 \cdot \rho_{olja} \cdot g + (d_2)^2 \cdot (d_2 - h - d_1) \cdot \rho_{vatten} \cdot g - (d_2)^2 \rho_{trü} g = 0$$

$\Rightarrow$

$$h = d_2 - d_1 + \frac{d_1 \rho_{olja} - d_2 \rho_{trü}}{\rho_{vatten}}$$

enhet $\frac{m \cdot \frac{kg}{m^3}}{kg/m^3} = m$ ok!

DI)

Låt repets okända längd betecknas L .

Geometrin ger då villkoret

$$L = y + \sqrt{x^2 + h^2}$$

från vilket vi kan räkna ut

$$\dot{y} = -\frac{x \cdot \dot{x}}{\sqrt{x^2 + h^2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{\dot{x}^2 + x \cdot \ddot{x}}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{x^2 \dot{x}^2}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Vid läget där bilen nått konstant hastighet har vi

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = v \\ x = l \end{cases} \Rightarrow \ddot{y}(x=l) = -\frac{v^2}{\sqrt{l^2 + h^2}} + \frac{l^2 v^2}{(l^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{v^2 h^2}{(l^2 + h^2)^{3/2}}$$

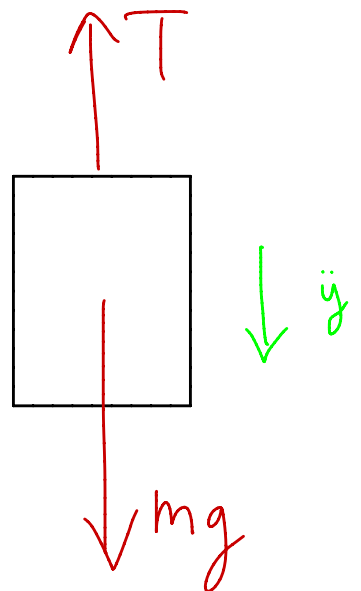
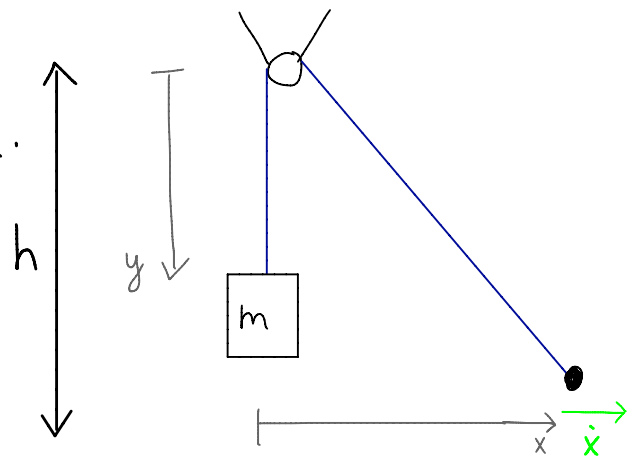
(Notera att $\ddot{y} < 0$, dvs lädan rör sig uppåt med koordinatsystemet som i figuren.)

Friläggning av lädan ger nu rörelsekv:

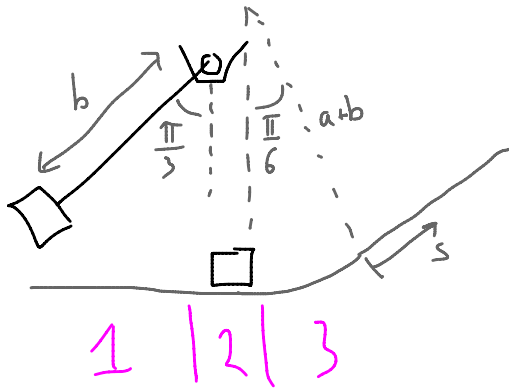
$$\downarrow m\ddot{y} = mg - T \Rightarrow T = mg + \frac{mv^2 h^2}{(l^2 + h^2)^{3/2}}$$

har enhet

$$\frac{\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \text{m}^2}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg} \text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{ok!}$$



D2)



Bevarade storheter under förloppet:

- (stöt) $\begin{cases} 1) \text{ Energi} \\ 2) \text{ Energi \& rörelsemängd} \\ 3) \text{ Energi} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 1 \quad & m_A g (b - b \cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{m_A V_A^2}{2} \\ 2 \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{m_A V_A^2}{2} &= \frac{m_A (V_A')^2}{2} + \frac{m_B (V_B')^2}{2} \\ m_A V_A &= m_A V_A' + m_B V_B' \end{aligned} \right. \\ 3 \quad & \frac{m_B (V_B')^2}{2} = m_B g (a+b - (a+b) \cos(\frac{\pi}{6})) + m_B g s \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow V_A = \sqrt{2gb(1 - \cos(\frac{\pi}{3}))} = \sqrt{gb}$$

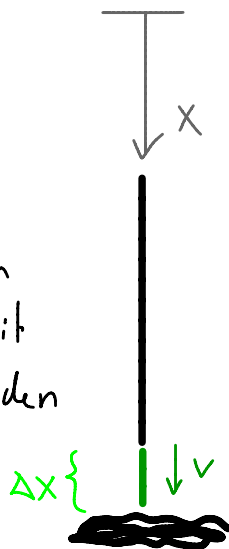
$$\begin{aligned} \textcircled{2} \Rightarrow m_A V_A^2 &= m_A (V_A - \frac{m_B}{m_A} V_B')^2 + m_B (V_B')^2 \\ \Leftrightarrow m_B (V_B') &\left[\left(\frac{m_B}{m_A} + 1 \right) V_B' - 2V_A \right] = 0 \\ \Rightarrow V_B' &= 2 \frac{m_A}{m_A + m_B} V_A \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow s = \frac{(V_B')^2}{g} - (a+b)(2 - \sqrt{3}) = 4 \frac{m_A^2}{(m_A + m_B)^2} \cdot b - (a+b)(2 - \sqrt{3})$$

$$[s] = m \quad \underline{ch!}$$

D3)

Betrakta kedjan på vågen tillsammans med en liten bit Δx på väg ned under tiden Δt .



Förändringen i rörelsemängd under intervallet Δt ges av

$$\Delta G = 0 - p v \Delta x$$

Denna förändring orsakas av den under förloppet tillförda impulsen.

$$-p v \Delta x = (m g - N) \Delta t \Rightarrow N = m g + p v \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} m g + p v^2$$

När kedjan har fallit en sträcka x fås farten genom energibevaring:

$$\frac{m v^2}{2} = m g x \Rightarrow v = \sqrt{2 g x}$$

Massan på vågen då kedjan fallit en sträcka x är

$$m = \rho x$$

Tillsammans ges nu normalkraften av

$$N = \rho g x + 2 \rho g x = 3 \rho g x$$

$$[M] = \frac{k g}{m} \cdot m = k g \text{ ok!}$$

dvs vågen ger utslaget $M = 3 \rho x$ eftersom en lika stor men motriktad kraft $-N$ verkar på vågen.

Tentamen i Mekanik 1 (FFM515/FFM516)

Tid och plats: Fredagen den 21 augusti 2015 med start 08.30 på Johanneberg.

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Ulf Gran

Jour: Hampus Linander, tel. 073-6266687, besöker tentamenssalarna c:a kl. 10.00 och 12.00.

OBS: Tentamen är indelad i **två delar**, del 1 och 2. Du kan välja **ett** av följande alternativ:

- Tentera hela kursen genom att lösa båda delarna av tentan under 5 timmar (sista inlämning 13.30). För att bli godkänd (på tentan och hela kursen) krävs för studenter registrerade på den nya kursen FFM516 minst 6 poäng totalt varav minst 3 poäng på varje del. För studenter registrerade på den gamla kursen FFM515 krävs endast minst 6 poäng totalt, dvs det finns inget krav på minst 3 poäng på varje del av tentan.
- Tentera en del av kursen genom att lösa en av delarna av tentan under 3 timmar (dvs med sista inlämning 11.30). För att bli godkänd på den del studenten valt att tentera krävs minst 3 poäng. Kan vara lämpligt val om man sedan tidigare är godkänd på en del av kursen.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska uttryckas i de storheter som är givna i uppgiftstexten och i tillhörande figur (samt tyngdaccelerationen g om denna behövs) och, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

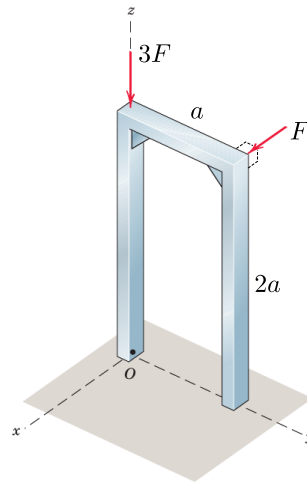
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på varje del av tentan, och maximalt 18 poäng på hela tentan. För att bli godkänd på en del av tentan krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5. För kraven att bli godkänd på båda delarna av tentan se rutan ovan. Förutsatt att man uppfyller kraven för godkänt är betygsgränserna 6-10 för betyg 3, 11-14 för betyg 4 samt 15-18 för betyg 5.

Rättningsgranskning: Tisdag 8/9 2015 kl.12.00-12.30 i sal FL61.

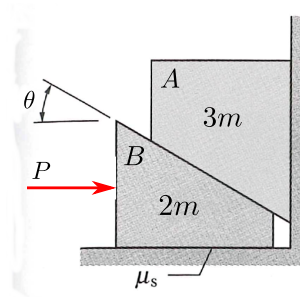
Lycka till!

Del 1

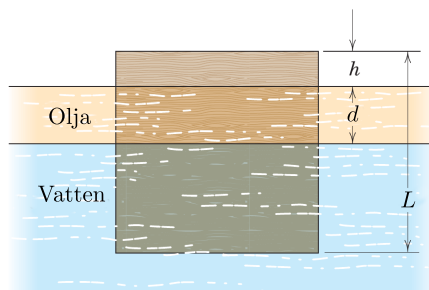
- De två markerade krafterna kan ersättas med en kraftskruv, d v s en resulterande kraft $\mathbf{R}$ med en viss verkningslinje och ett parallellt kraftparsvridmoment $\mathbf{M}$. Bestäm dessa, samt koordinaterna för den punkt P där verkningslinjen skär yz -planet.



- Kropparna A och B har massorna $3m$ respektive $2m$. Den statiska friktionskoefficienten mellan kroppen B och underlaget är μ_s . Bestäm det intervall som kraften P måste ligga i för att jämvikt skall råda. (Friktionen mellan kropparna A och B samt mellan A och den vertikala väggen försummas.)

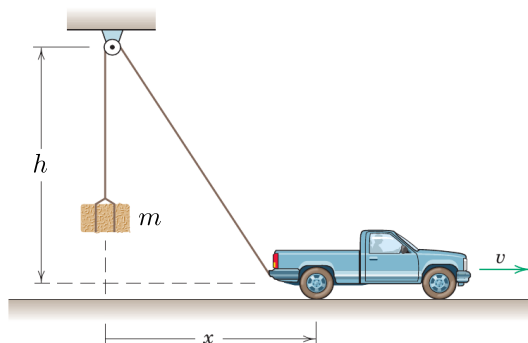


- Ovanpå vattnet (densitet ρ_{vatten}) ligger ett oljeskikt (densitet ρ_{olja}) med tjocklek d . En kub av trä (densitet $\rho_{trä}$) med sidlängden L flyter enligt figuren. Bestäm höjden h . (Det gäller att $\rho_{trä} < \rho_{olja} < \rho_{vatten}$.)

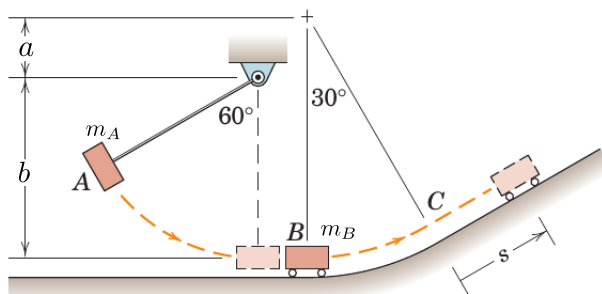


Del 2

1. Bilen används för att dra upp en låda med massan m . Om bilen har den konstanta hastigheten v vid $x = l$, beräkna spänningen T i repet i detta läge.



2. Kroppen A med massan m_A släpps i vila i det avbildade läget med 60° utslagsvinkel, och träffar sedan vagnen B med massan m_B , som befinner sig i vila. Stöten är fullkomligt elastisk. Bestäm avståndet s från punkten C till den punkt där B vänder. Friktionen försummas.



3. Kedjan har längden L och massan m och släpps när den hänger i vila med övre ändpunkten i $x = 0$. Bestäm utslaget på vågen (med enheten massa) som funktion av x .

