Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Torsdagen den 19 mars 2015 klockan 08.30-11.30 i hörsalar på hörsalsvägen.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-7723182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

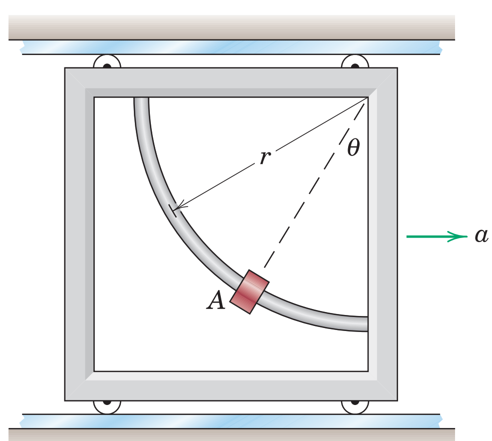
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

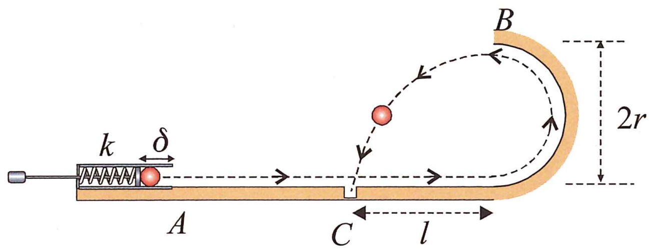
Rättningsgranskning: Så snart som möjligt med tanke på omtentan i påsk. Datum och plats meddelas via mail (för studenter registrerade i PingPong) och via kurshemsidan.

Uppgifter

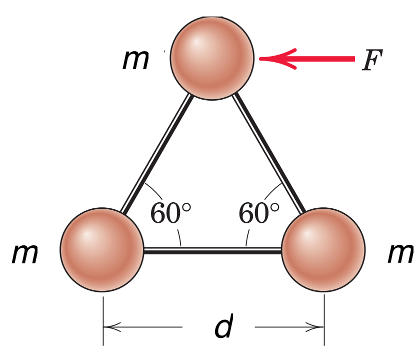
1. En ring A, med massan m, kan glida friktionsfritt längs en kvartscirkelformad ståltråd med radie r, vilken är fastsatt i en kvadratisk ram enligt figuren. Bestäm vinkeln θ då ringen är i jämvikt om ramen har accelerationen a åt höger.



2. Avståndet l till hålet C är anpassat så att partikeln med massan m landar i C om den har den minsta hastighet som krävs för att den ska nå punkten B längs den halvcirkelformade banan med radien r. Bestäm hoptryckningen δ av fjädern vid A, vars fjäderkonstant är k, så att partikeln landar i C. Bestäm också avståndet l.



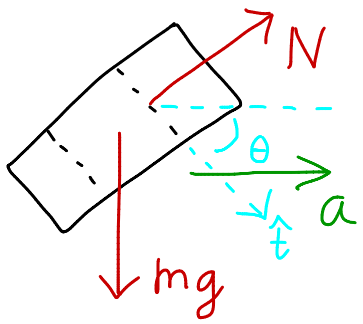
3. Tre identiska sfärer, vardera med massan m, är stelt ihopsatta med tre stavar, vilkas massa kan försummas. Systemet ligger på ett bord enligt figuren (dvs alla klot ligger på bordet och befinner sig i samma horisontella plan) och friktionen mellan sfärerna och bordet kan försummas. Sfärerna är i vila då en kraft F appliceras på den översta sfären enligt figuren. Beräkna accelerationen $\bar{a}$ hos sfärernas masscentrum, vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ runt masscentrum och accelerationen a hos den översta sfären *just efter* kraften börjat verka på systemet (dvs då sfärerna ännu inte hunnit flytta sig jämfört med positionerna i figuren).



Lycka till!

1)

När ringen är i jämvikt i ramen rör den sig inte längs ståltråden, och accelererar därför tillsammans med ramen.
Friläggning av ringen i jämvikt:



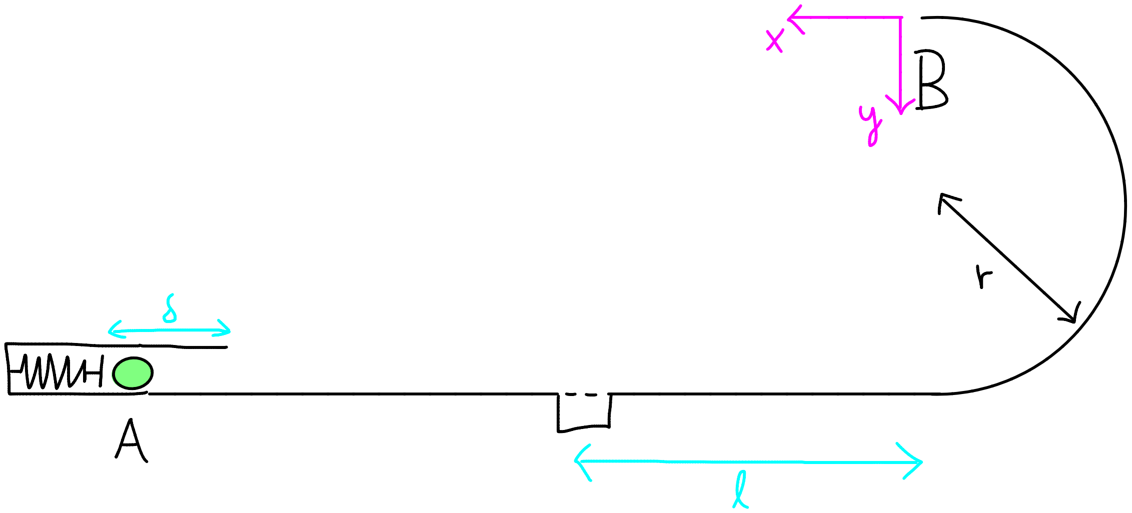
Genom att skriva rörelseekvationen i $\hat{t}$-led elimineras normalkraften N direkt:

$\hat{t} \searrow$: $mg\sin(\theta) = ma\cos(\theta)$

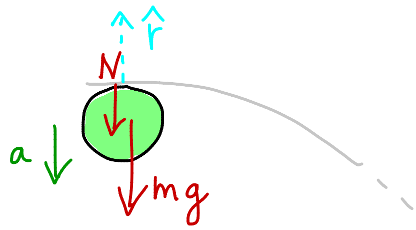
$$\Longleftrightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$$

2)



Friläggning av partikeln vid B:



När farten är precis tillräcklig för att nå B så gäller att $N=0$. Eftersom partikeln rör sig i en cirkelbana fram till B ges accelerationen av $a=-a_r=-r\dot{\theta}^2=-\frac{v^2}{r}$.

Rörelseekvationen i $\hat{r}$-led är därför

$$-mg=-m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v=+\sqrt{rg}$$ i x-led, vilket är hastigheten vid B.

eftersom den rör sig åt vänster

Energiprincipen ger nu att

$$\underbrace{\frac{1}{2}k\delta^2}_{V_{fjäder}}=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_B}+\underbrace{2rmg}_{V_B}=\frac{5}{2}rmg$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta=\sqrt{\frac{5rmg}{k}}}$$

$$[\delta]=\sqrt{\frac{m\,kg\,m/s^2}{kg/s^2}}=m$$

Från B faller partikeln med konstant acceleration

$$m\ddot{y} = mg \overset{\begin{cases} y(0)=0 \\ \dot{y}(0)=0 \end{cases}}{\Rightarrow} y = \frac{1}{2}t^2.$$

Fallet tar därför t_{fall} enligt

$$y(t_{fall}) = \frac{1}{2} g t_{fall}^2 = 2r \Rightarrow t_{fall} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Inga krafter verkar i x-led så att

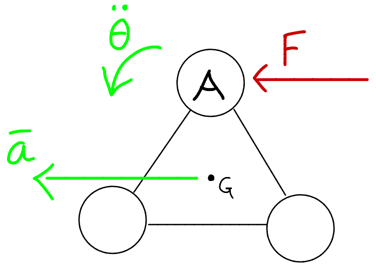
$$\ddot{x} = 0 \overset{\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=v \end{cases}}{\Rightarrow} x = vt$$

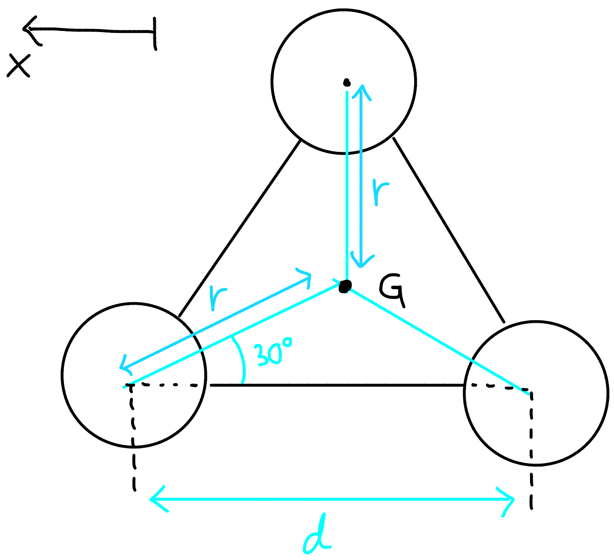
$$\Rightarrow \underbrace{x_{mark}}_{\text{där partikeln landar}} = \ell = v \cdot t_{fall} = \sqrt{rg}\cdot 2\sqrt{\frac{r}{g}} = 2r$$

dvs $\boxed{\ell = 2r}$

3)

Frilägging:





$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{d}{2r} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

Rörelseekvationen för masscentrum är

$$F\hat{x} = 3m\bar{a} \Rightarrow \boxed{\bar{a} = \frac{F}{3m}\hat{x}}$$

$$[\bar{a}] = \frac{\text{kg m}}{\text{kg s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Kraften F skapar ett moment kring tyngdpunkten G, vilket ger en vinkelacceleration för systemet enligt

$$\dot{H}_G = M$$

Rörelsemängdsmomentet H_G och momentet M ges av

$$H_G = 3mr^2\dot{\theta} = md^2\dot{\theta}$$

$$M = r \cdot F = \frac{\sqrt{3}}{3}dF$$

$$\Rightarrow \quad \dot{H}_G = md^2\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}dF \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}F}{3md}}$$

$$[\ddot{\theta}] = \frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}{\text{kg m}} = \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_A} = \bar{a} + r\ddot{\theta}\hat{x} = \left(\frac{F}{3m} + \frac{F}{3m}\right)\hat{x} = \boxed{\frac{2F}{3m}\hat{x}}$$

$$[a_A] = [\bar{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$