Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Lördagen den 17 januari 2015 klockan 08.30-11.30 i M.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-7723182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

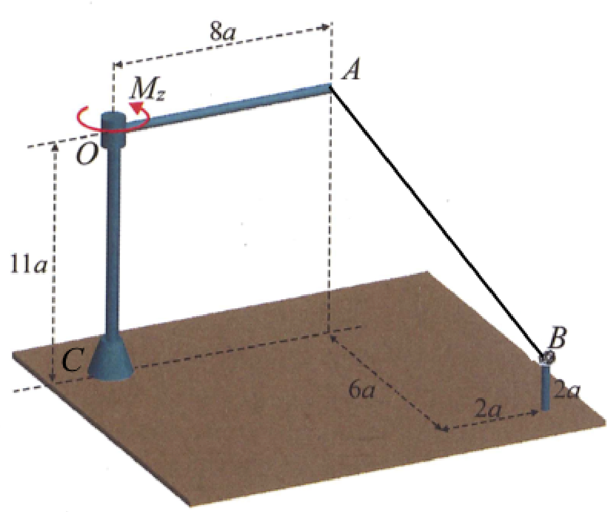
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

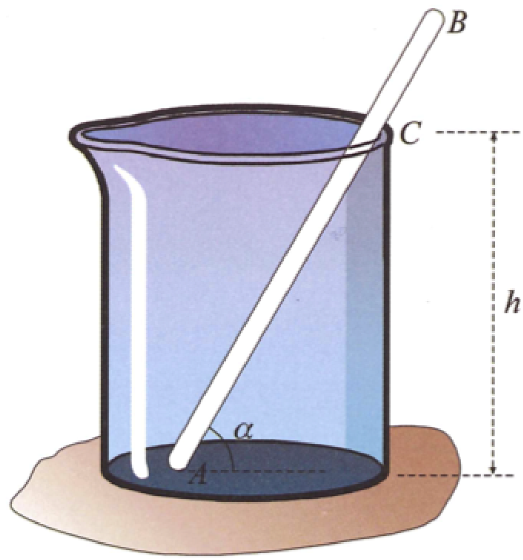
Rättningsgranskning: Fredag 6/2 2014 kl.11.45-12.15 i rum O6115.

Uppgifter

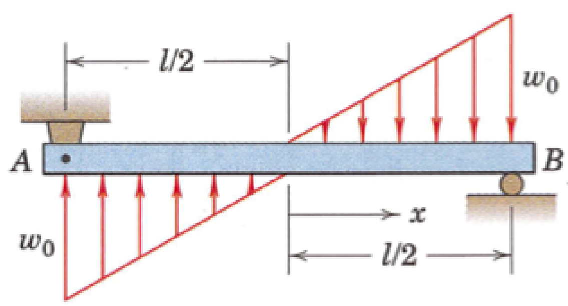
1. En arm OA är fäst vid punkten O så att den endast är fri att rotera (friktionsfritt) kring den vertikala axeln OC. Armen påverkas av ett konstant vridmoment M_z men är hindrad att rotera på grund av en vajer som är fäst i änden A av armen samt i punkten B på ett lodrätt stift med höjden $2a$ enligt figuren. Bestäm beloppet av spännkraften S i vajern uttryckt i termer av M_z och a.



2. En pinne AB med längden l ligger i ett tomt glaskärl med höjden h enligt figuren. Bestäm friktionskoefficienten μ mellan kärlet och pinnen om den minsta vinkeln mellan pinnen och kärlets botten vid jämvikt är $\alpha = 60°$ då $l = \frac{4}{3}h$.

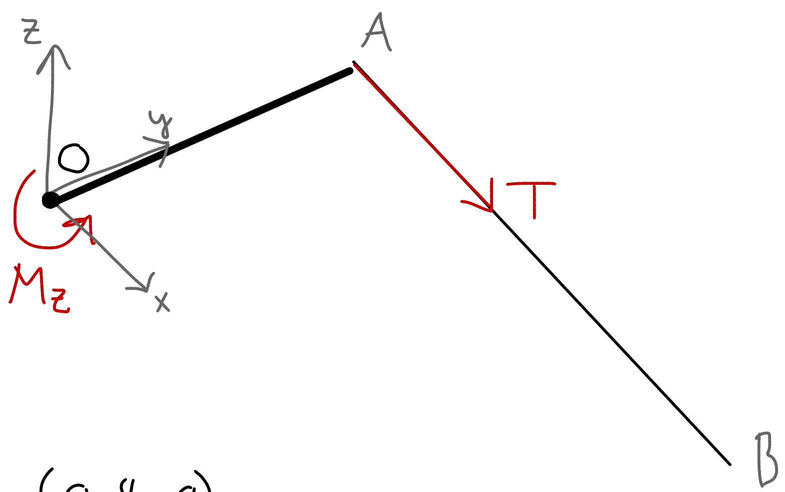


3. Den masslösa balken belastas med två liknande, men motsatta, laster enligt figuren, där den maximala kraften per längdenhet är w_0. Balken roterar fritt runt axeln vid A och vilar friktionsfritt vid B. Ta fram uttrycken för skjuvkraften V och böjmomentet M i balken som funktion av avståndet x mätt från balkens mittpunkt.



Lycka till!

1)



$$A = (0, 8a, 0)$$

$$B = (6a, 10a, -9a)$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{AB}}{|AB|} = \frac{(6a, 2a, -9a)}{a\sqrt{\underbrace{6^2+2^2+9^2}_{121}}} = \frac{1}{11}(6, 2, -9)$$

$$\vec{M}^{O}_{T} = \vec{A} \times T\hat{T} = \frac{T\,8a}{11}\,\hat{y} \times (6\hat{x} + 2\hat{y} - 9\hat{z}) = \frac{8a}{11}T(-6\hat{z} - 9\hat{x})$$

$$\circlearrowleft O\ \hat{z}: \quad M_z - \frac{48a}{11}T = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow T = \frac{11 \cdot M_z}{48 \cdot a}}$$

$$[T] = \frac{L \cdot [F]}{L} = [F] \quad \text{ok}$$

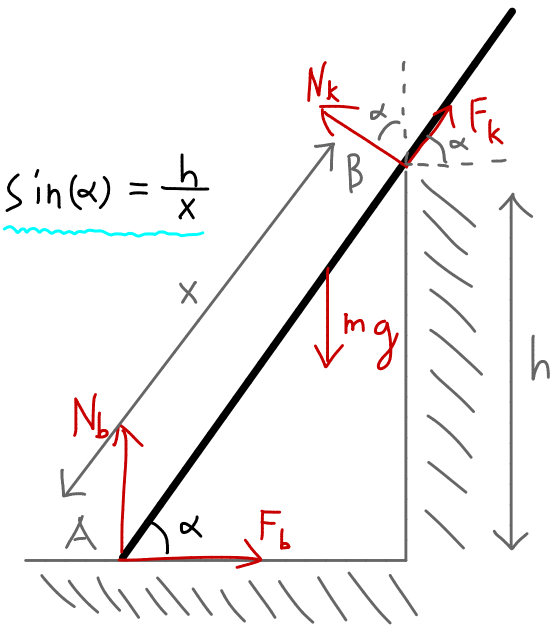
2)

$$\circlearrowleft A: \quad -\frac{mgl\cos(\alpha)}{2} + \frac{h}{\sin(\alpha)} \cdot N_k = 0$$

$$\rightarrow: \quad F_b + F_k\cos(\alpha) - N_k\sin(\alpha) = 0$$

$$\uparrow: \quad N_b - mg + N_k\cos(\alpha) + F_k\sin(\alpha) = 0$$

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{x}$$



Precis innan staven glider gäller $\begin{cases} F_k = \mu N_k \\ F_b = \mu N_b \end{cases}$ eftersom den måste glida på båda punkter samtidigt.

$$\Rightarrow \quad -\frac{mgl\cos(\alpha)}{2} + \frac{h}{\sin(\alpha)}N_k = 0 \quad ①$$

$$\mu N_b + N_k(\mu\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) = 0 \quad ②$$

$$N_b + N_k(\cos(\alpha) + \mu\sin(\alpha)) - mg = 0 \quad ③$$

$$② - \mu③: \quad N_k\sin(\alpha)(-1-\mu^2) + \mu mg = 0$$

$$\Rightarrow N_k = \frac{\mu mg}{\sin(\alpha)(1+\mu^2)} \quad ④$$

$$④ \curvearrowright ①: \quad -\frac{\cancel{mg}l\cos(\alpha)}{2} + \frac{h}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{\mu m\cancel{g}}{\sin(\alpha)(1+\mu^2)} = 0$$

$$\begin{cases} l = \frac{4}{3}h \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} + \frac{4\mu}{3(1+\mu^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu^2 - 4\mu + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mu - 2)^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 2 \pm \sqrt{3}$$

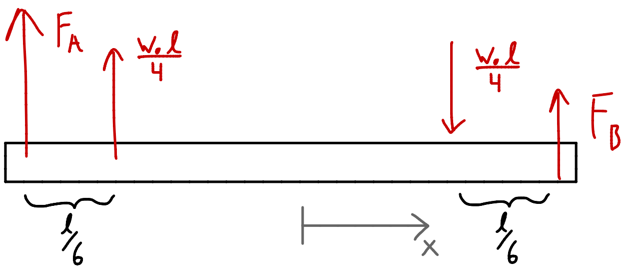
Den minsta av dessa ger den relevanta friktions-koefficienten.

$$\mu = 2 - \sqrt{3}$$

Den andra lösningen svarar mot den ofysikaliska situationen där $\mu > 1$.

3)

Externa krafter:

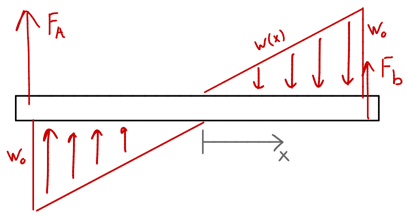


I frilägningen har kraftfördelningen delats in i två triangulära bitar med de indikerade resulterande krafterna.

$$\circlearrowleft A: \quad \frac{\ell}{6}\frac{W_0\ell}{4} - \left(\frac{\ell}{2} + \frac{2}{3}\frac{\ell}{2}\right)\frac{W_0\ell}{4} + \ell F_B = 0 \Rightarrow F_B = \ell\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)\frac{W_0}{4} = \ell\frac{W_0}{6}$$

$$\circlearrowleft B: \quad \frac{\ell}{6}\frac{W_0\ell}{4} - \left(\frac{\ell}{2} + \frac{2}{3}\frac{\ell}{2}\right)\frac{W_0\ell}{4} - \ell F_A = 0 \Rightarrow F_A = -\ell\frac{W_0}{6}$$

Interna krafter



$$W(x) = x \cdot \frac{W_0}{\ell/2} = \frac{2W_0}{\ell}x$$

$dV = -w(x)\,dx$:

$$\int_{V_B}^{V(x)} dV = -\int_{\ell/2}^{x} w(s)\,ds = -\frac{W_0}{\ell/2}\int_{\ell/2}^{x} s\,ds = -\frac{2W_0}{\ell}\left[\frac{s^2}{2}\right]_{\ell/2}^{x} = -\frac{W_0}{\ell}\left(x^2 - \frac{\ell^2}{4}\right)$$

$$V(x) = \frac{W_0}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{4} - x^2\right) + V_B \quad , \quad V\left(\frac{\ell}{2}\right) = V_B = -F_b = -\frac{W_0}{6}\ell$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{W_0}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{12} - x^2\right)}$$

$$[V] = \frac{[F]}{L}\cdot\frac{1}{L}\cdot L^2 = [F] \quad \text{ok}$$

$dM = V(x)\,dx$:

$$\int_{M_B=0}^{M(x)} dM = \frac{W_0}{\ell}\int_{\ell/2}^{x}\left(\frac{\ell^2}{12} - s^2\right)ds = \frac{W_0}{\ell}\left[\frac{\ell^2}{12}s - \frac{s^3}{3}\right]_{\ell/2}^{x} = \frac{W_0 x}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{12} - \frac{x^2}{3}\right) - \frac{W_0}{\ell}\left(\frac{\ell^3}{24} - \frac{\ell^3}{24}\right) = \frac{W_0 x}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{12} - \frac{x^2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x) = \frac{W_0 x}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{12} - \frac{x^2}{3}\right)}$$

$$[M] = [V]\cdot L = [F]\cdot L \quad \text{ok}$$